ORONTII FINAEI, DELPHINATIS, REGII MATHEMATICARVM PROFESSORIS,

De rebus mathematicis, hactenus desideratis, Libri IIII.

¶ Quibus inter cætera, Circuli quadratura Centum modis, & suprà, per eundem Orontium recenter excogitatis demonstratur.

LVTETIAE PARISIORVM.
Anno Christi Seruatoris,
M. D. LVI.

Ex officina Michaëlis Vascosani, uia Iacobæa ad insigne Fontis.

Cum Priuilegio Regis.

CHRISTIANISSIMO GALLIARVM REGI HENRICO II. ANTONIVS MIZALDVS MONLVCIANVS, S. P. D.

QVVM nullum præſtantius bonum à Deo Opt. Max. hominibus ſit conceſſum, HENRICE Rex Chriſtianiſſime, quàm doctrinarum κοινωνίᾳ, & rerum pulchrarum ingenioſa atq; utilis diſquiſitio: præclarè de Republica, imò uerò de uniuerſo mortaliũ genère mihi mereri ſemper ſunt uiſi, quicunque ad diſciplinarum communicationem, uſum & illuſtrationem, animum ſtrenuè conuerterunt: ac omnem operam, ſtudium, laborem, & induſtriam in id ſedulò contulerunt. Quod cùm optimus idémque doctiſſimus uir ille Orontius iam olim prudenter animaduertiſſet, tota uita conquieſcere non potuit, donec lectionibus cùm publicis, tùm priuatis, adhæc multis libris editis, in id incubuiſſe, & tandẽ ſuccubuiſſe palàm teſtaretur. Quam rem, tuo, & Chriſtianiſs. patris tui FRANCISCI, fauore & auſpicio gnauiter aggreſſus, ad extremum uſque uitæ actum fœliciſſimè perduxit. Deo in omnibus & per omnia aſpirante: qui ut humanæ infirmitati ſuccurrat, & infirmæ humanitati proſpiciat, quæ ſuapte natura uix infima aſſequi poteſt, in aliquibus Heroicis uiris præſtantes animorum motus, latentéſque igniculos excitare ſubinde ſolet, qui poſtea quaſi diuinitus afflati, & cœlitus agitati, ad rerũ magnarum inuentionem, & difficilium explicationem, mira feruntur induſtria: ſummo certè patrocinantis Dei miraculo, & ingenti talium uirorum laude, immortalíque patriæ illorum ornamento: ob præclara monimenta quæ ueluti publicum urbium peculium, & regnorum inſigne decus memoriæ poſteritatis conſecratum, à tantis uiris relinquuntur. Hinc nimirum celebre adhuc eſt Syracuſarũ nomen: non ob præſtantiſſima ſigna & pretioſas tabulas, quibus olim abundabant Syracuſæ, ſed ob unius

Archimedis Mathematici clarissimi, eximia & adhuc uiuentia opera, perpetuóque uictura, & Syracusas ubique celebratura. Quod de tua Lutetia Galliarum metropoli, idem aliquando futurum, certò tibi polliceri debes: nó tam quòd syncera religione, & legibus æquissimis illam optimè constitutam uideas, ad hæc opum magnitudine & splendore egregiè ornatam, quàm quòd in ea eloquentiæ, philosophiæ, medicinę, mathematũn, ac omnium optimarum artium & linguarum publicum habeas gymnasium, tua & illustrissimi patris tui liberalitate, multis iam annis florentissimum, & uigilantissimorum ac doctissimorum professorum duodecim (quotus est musarum & charitũ numerus) quotidianis interpretationibus, proposito cuique honesto stipendio, gloriosè illustratum. Quorum omnium industria ac monimentis, immortalitatem tibi & regno tuo iamiam comparatam esse, quis non uidet? Quis nescit priscos Reges de literis & literatis bene merendo, posteritatem sui memorem fecisse? Quis hodie non celebrat Alfonsum Castiliæ Regem, quòd liberaliter contulerit quadringenta milia aureorum, doctis aliquot uiris ex Iudæa & Aphrica accersitis, ad constructionem Astronomicarum tabularũ, quæ hodie omnibus sunt in manu? Quis Alexandrum Macedonem multis ante illum seculis non prędicat, quòd octingenta talenta, hoc est quadringenta & octoginta milia coronatorum, Aristoteli pręceptori dederit ad naturæ animantium inquisitionem? Sunt hæc magna & celebria, sed, meo iudicio, maiora ac celebriora quæ facis. Qui regia motus liberalitate, & hæreditaria imbutus uirtute, magnam pecuniam nõ uni tantùm numeras, ut Alexander, aut tribus uel quatuor, ut Alfonsus, quin potius duodecim, ut dixi, præclaris ac selectis uiris, hinc inde ad Lutetianam tuam Academiam publicè uocatis. Quorum pars quotidie fœliciter interpretando, pars doctè scribendo, pars utrumque exactè faciendo, per uniuersam Europam, nedum Galliam, artium omnium & disciplinarum, linguarúmque fœcunda semina, longè ac latè spargit. Quæ ubi ætatem tulerũt, suauissimos fructus edunt ad communem regnorum utilitatem, & tutam Rerumpubl. conseruationem. In quorum ordinem cùm optimus, idemque doctiss. uir ille Orontius,

omnium primus à Christianissimo patre tuo cooptatus fuisset,
& à tua Maiestate postea confirmatus ac probatus: cùm ibi to-
tos uiginti quinque annos, & docendo, & multa scribendo, ma-
gna laude uersatus fuisset: cùm ea in prouincia se pro dignitate
semper gessisset, atque aliis dies ac noctes sudando sese macerass-
set, imò uerò & corpore & animo neglecta familia, quā nume-
rosam & pauperem habebat, funditus exhausisset: canus & sexa-
genarius uitam cum morte ibi nuper mutauit: morte, inquam,
illi summè acerba & molesta, non quòd eam grauiter ferret, qui
se mortalem agnoscebat, & legibus fati obnoxiū: sed quòd do-
leret populosam & benè natam sobolem, in tanta rerum inopia
relinquere: adhæc, Mathematica aliquot opera, quæ in manu
uixdum ex dimidio elaborata habebat, imperfecta & impolita
uidere. Sibi tamen ac doctis omnibus impensè gratulabatur, &
Deo Opt. Max. summas gratias agebat, quòd librū istum, in quo
totum septennium indefesso sudore consumpserat, ad colo-
phonem duxisset. Quem accuratè impressum, ut Maiestati tuæ
offerrem, qua ualebat in me auctoritate, moriens, semel at-
que iterum imperauit: cùm ob alia, tum ut suorum laborum
præsens haberes μνημόσυνον, & sublevandæ suorum inopiæ, posi-
tum ob oculos pium monimentum. Addebat, æquissimum esse
ut hanc suarum lucubrationum postremam acciperes manum,
cùm ter maximus pater tuus primam regali alacritate, & dextra
summè liberali, annis abhinc triginta quinque plus minus ul-
trò accepisset. Quod me & libenter, & ex animo facturum cùm
illi fuissem pollicitus, ubi in fata concessit, librum unà cum fi-
guris, quas paulò antè quàm abiret, ingeniosa manu ad unguē
pinxerat, Michaëli Vascosano typographo diligentissimo ac
doctissimo, statim committere nihil sum cũctatus: nullo pror-
sus mutato uerbo, nec item sensu: ne auctori & parenti iniuriā
facerem. Reliqui itaque posthumum opus suæ integritati &
origini. Quod quale quale est, diuinum sanè & eruditum, Ma-
iestati tuæ, HENRICE Rex potentissime, hodie hilariter offero:
cùm ut postremis tanti uiri mandatis ingenuē pateam, tum ut
rerum mathematicarum studiosis, iamdiu desideratam semen-
tem, sub tuo nomine, ubique terrarum dispergam. Cuius cam-

pus, præterquam quòd multa, à nemine adhuc, quod utique ſciam, tentata habet: etiam circuli τετραγωνισμὸν ſeu quadraturam, totos bis mille annos, uel ampliùs, à ſummis & excellentiſſimis uiris quæſitã, ſed non inuentã, omnipotentis Dei beneficio, uiis & demõſtrationibus infinitis, uerè (niſi fallor) cõcludit ac aperit. Reliqua de catalogo ad calcem operis deſcripto, unicuique facilè patebunt. Hoc poſtremum erit. Multæ admirabiles machinæ omnibus ætatibus apud eas gentes, in quibus Geometriæ & Arithmetices ſtudia uiguerunt (ut apud Phœnices, Aegyptios, Chaldæos, deinde apud Græcos, Siculos & Latinos) ratione & proportione Geometrica extructæ fuerunt, munitæ arces, factæ columnæ, pyramides item ac turres, erecti pontes & arcus, compoſitæ naues, excogitati portus, fabricata bellica tormenta, conſtructa ædificia, theatra ac templa, & alia huius picturæ innumera, Geometrica, ut dictum eſt, ratione & proportione elaborata, quæ Orontiani huius operis adminiculo, & facilè & commodè perfici deinceps poterunt. Sed hæc ſatis. Vereor enim ne Maieſtatem tuam, cui populi commiſſi, & magna negocia curæ, uerboſa epiſtola offendam. Itaque, bene ac feliciter Vale, Regum omnium Rex optime: & pauperculæ Orontianæ familiæ, pietate tua, ſuccurrere dignare: ut tibi & regno tuo, paterna imitatione, aliquando uſui ac ornamento eſſe poſsit. Lutetiæ Pariſiorum, Idibus Aprilis. Anno Virginei partus, M. D. LVI.

AD ILLVSTRISSIMVM LOTHARINGIAE CARdinalem & Principem, Ioannes Finæus, & Orontius eius frater, dolentes ac mœsti.

QVI Mathemata nunc colunt, amántque,
Gratias & agunt, habéntque miras,
Pro tuis in Orontium parentem
Nostrum tot meritis, benigne Princeps,
Splendor pontificum, & sacri Senatus:
Iidem te quoque ter rogant, quatérque,
Nobis ut pater & patronus esse
Velis: qui ingenuè fatemur, ex te
Et stare, & cadere ut libet: secundum
Cœli numina, Gallicúmque Regem.
Eia, respice. Cardinalis ample,
Nos: nostræque domus, dies & horas
Omneis assiduo in dolore uetè
Versantis, lachrymabiles, piásque
Exaudito preces: & has teferto
Ad Regem, pietate cuique notum:
Mercedem Dominus dabit perennem.

Iidem ad ornatissimum Cardinalem à Castellione.

VT gemit erepto uiduatus compare turtur,
Et sterili mœrens fronde sedere solet:
Vtque altore suo catulus priuatus oberrat,
Donec fautorem uiderit esse sibi:
Sic nos, ô dolor! extincto genitore, miselli
In lachrymis nocteis ducimus, atque dies:
Sedibus errantes dubiis, uictúque carentes,
Dum detur qui nos rite fouere petat.
Hoc tanto dono, Præsul uenerande, paténsque
Castalidum, si nos fortè beare uoles,
Aut unum saltem numeroso de grege fratrum,
Rem gratam doctis feceris usque uiris.
Et si sunt aliquid manes, ut credimus, & sunt:
Hoc à te factum sentiet esse pater:
Qui te dilexit uiuens, moriénsque uocauit
Auxilium in nostrum sæpè, diúque. Vale.

ΕἸΣ ὈΡΌΝΤΙΟΝ.

Οὐρανὸν ἐς γαίην ἕλκες ὀρόντιε, σοῖσι μαθηταῖς
Ἄγχι παραστήσας ἄμφαδον ἄστρα βλέπειν.
Νῦν πάλιν αὐτὸς ἐς ἄστρα καὶ οὐρανὸν ἀστερόεντα
Γῆθεν ἀνελκύσθης μοιρηδίῃ δυνάμει.
Κἀυτὸς μὲν πάθες, ὧν ἧς ἄξιος, ἀλλὰ μαθηταὶ
Σοῦ τείροντο πόθῳ, σῶν τε μαθηματικῶν.
Ἀμφὶ δέ σοι μέγα πένθος ἀέξετο ἦμαρ ἐπ' ἦμαρ,
Οὐδὲ πλουτή τις ἔσκεν ὀδυρομένοις.
Αὐτὰρ ὁ κηδεμόνων σοῦ ὁ πιστότατος καὶ ἄριστος
Μίζαλδος ταύτην εὗρε παρηγορίην.
Ὑστατίην βίβλον σοῦ ἀνέκδοτον ἀσέτ' ἐξῆγεν,
Τὴν ἔτι κρυπτομένην παρθένον ὡς θαλάμῳ·
Ἣν σὺ πατὴρ ἐφίλεις σέο παίδων ἔξοχα πάντων,
Οἷα γέρων τις ἀνὴρ υἱέα τηλύγετον.
Τὴν δὲ φίλος σοι ἑταῖρος ἅπασι φίλοις σοῖ ἑταίροις
Γαύθος ἄσβεστον ἄλκαρ ἔδωκεν ἔχειν.
Νῦν δ' ἡμεῖς σέο βίβλον ὀρόντιε τήνδ' ἀγαπῶντες
Ἀντὶ σοῦ, ἧττον μέν σ', ἀλλὰ ποθοῦμεν ὅμως.

Ἰω. Αὐράτου.

VITA ET TVMVLVS ORONTII, PER ANTONIVM MIZALDVM.

Licet, Viator, concito properes gradu,
Vnum hoc amicè te precor, dum hâc commeas
Tantisper hære, dum quod est uerum intelligas.
Ter ille summus, & ter illustris ORONTIVS,
Præceptor, hospes charus, ac amicus meus,
Hoc in tumulo dormit, sepultus ibi iacet:
Delphinas patriâ, in oppido Briansonio
Natus, generoso & nobili uerè patre,
Doctore medico, ac philosopho admirabili:
Necnon Mathematico eximio, ut libri docent.
Quo mortuo, cùm iuuenis esset magni animi,
Lutetiam uenit: ubi perfectis studiis
Fæliciter, & sacro fauente Mercurio,
Sociam sibi fecit, pariterque coniugem
DIONYSIAM, *cognomine & re* CANDIDAM,
Formâ speciosâ, ac immaculatis moribus:
Cum qua decies bis uixit annos, plùs minùs.
Atque ex ea suscepit innumeram, & probam,
Ac egregiam sobolem: sed ex qua sunt hodie
Tantùm superstites (nisi fallor bene)
Sex: masculi quinque, & puellula unica.
Ille est ORONTIVS, *ille* ORONTIVS *meus*
Præceptor, hospes charus, ac amicus bonus:
Cunctis abundans dotibus cùm corporis,
Tum mentis, & raris Deæ cæcæ bonis:
Orbis columen, & Galliæ excellentissimum
Miraculum, lumen, decus, spectaculum:
Candore uitæ, moribus integerrimis,
Turbæ fugâ, domestico silentio,
Amore recti, charitate proximi,
Seræque noctis lucubratiunculis,
Bene cognitus suis domi, necnon foris.
Perpauca multis, multa paucis differens

F *estiuiter,salsěque dictis plurimùm*
G *audens,& ingenuos iocos referens libens:*
P *ræceps ad iram,cætera prorsum candidus.*
C *ui Lutetiana debet Academia*
V *el id,quòd illic maxima cum gloria*
M *athematicæ artes bene docentur:quas omnium*
P *rimus,sepultas misit in lucem,ac docuit,*
A *nnos,ut aiebat,decies ter,ac ampliùs:*
A *Regibus duobus acceptis annuis*
S *tipendiis,ob idque professor publicus:*
P *ro dignitate se gerens prouinciæ:*
Q *uam lectionibus uariis,& doctissimis*
A *c aureis libris ad usque miraculum,*
D *um uixit,illustrauit,ut notum est omnibus*
T *um literatis,tum probis,tum candidis:*
Q *ueîs adfuit,queîs profuit,fauit,contulit,*
Q *uantùm licebat pro modulo,& pro uiribus:*
N *unquam ociosos esse sustinens suos:*
S *ed uerè honestis occupans negociis:*
A *matus omnibus,omnibúsque amabilis.*
H *uic animus usque,huic unicus fuit scopus,*
H *uic summa cura,huic propria semper functio,*
B *onas ut horas collocaret non malè:*
N *ullius æquè,ac temporis,parcus rei:*
N *imio proinde ut se studio,noctes,dies*
C*onficeret,imò funditus se perderet:*
S *ic compositus, ut nominatim quempiam*
N *ulla inficeret labecula,uel incommodo:*
L *icet impudenter prouocarent sæpius*
M *ali,ἀλαζόνες,gloriosuli,liuidi,*
D *iris notandi iure Iambis optimo.*
C *asus per omneis,omnibúsque exercitus*
M *alis & aduersis,patiens semper fuit:*
T *uam usque præstans,Socrates,constantiam:*
P *rudentiámque simplicem præ se gerens:*
S *empérque satagens pro malis bona ut redderet.*

Non

Non arcuato Scorpionis uulnere
Mordens, lacessens, conficiens, & enecans:
Is captiosa & pestilentia dogmata
Explosa sanctos per patres olim, quibus
Vbique uulgus imperitum fluctuat,
Certò ut uenena exhorruit præsentia,
Omneis in hoc neruos & omnem industriam
Tendens, & adhibens, contrahens ac explicans,
Vt Christianismum referret purissimum.
Is Regibus tantùm fuit mirabilis,
Vt eius ædes ingredier sæpissimè
Non sint recusati: pariter multi Duces,
Et Cardinales, & numerosi nobiles,
Necnon Legati gentium atque Principum,
Vt cum uiro tanto loqui percommodè
Possent: adhæc uidere quæ manu propria
Vel pinxerat, uel sculpserat, uel descripserat,
Non dico chartas, aut libros, sed mille organa
Mathematica, uel alterius artificij.
Ille est ORONTIVS, *ille* ORONTIVS, *meus*
Præceptor, hospes charus, ac amicus bonus:
Qui hoc in tumulo dormit, sepultus ibi iacet:
Docti quod omnes nunc ferunt ægerrimè:
Extincta siquidem sunt μαθήματα *omnia,*
Necnon sepulta cum uiro tanto: prô dolor!
Acumen illud, illud ingenium periit,
Dignum quod omni permaneret sæculo.
Sed cesso plura conqueri: Viator, uale:
Hæc ego uolebam tibi referre: iterum uale:
Et manibus sepulti ORONTII *faue.*

Obiit Lutetiæ in suis ædibus, pridie nonas Octobris, Anno reparatæ salutis hominum, M. D. LV. Hora à meridie quarta, qua ille in lucem uenerat, natus annos LXI. ferè: iacet in cœnobio Carmelitarum.

SVMMA EORVM, QVAE IN SEQVENTIBVS libris, de rebus Mathematicis hactenus desideratis, pertractantur.

LIBER PRIMVS, INVENTIONEM DVARVM REctarum inter datas extremas continuè proportionalium, pluribus & hactenus inauditis modis exponit: Idem quoque de oblatis quibuscunque efficiés numeris. Vnà cum rationũ cõpositione, atque regulæ sex quãtitatũ origine notãda, ex ipsis lineis suborta proportionalibus.

LIBER SECVNDVS, RATIONEM CIRCVNFERENtiæ ad circuli diametrum exprimit: rectámque in circũferentiam uertere docet: necnon circulum in quadratum æquale, atque è diuerso, multifariam, & uiis hactenus intentatis, reuocat.

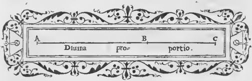
LIBER TERTIVS, CONTINET INVENTIONEM lateris cuiuslibet polygoni regularis in dato circulo descripti: reductionẽmque figurarum rectilinearum in circulum, & ipsius circuli in figuram rectilineam æqualem, etiam regularem: Et horum omnium augmẽntum, seu decremẽtũ, sub quauis ratione data, propria uniuscuiusque specie remanente.

LIBER QVARTVS ET VLTIMVS, OMNIMODAM solidorum transmutationem, cum ipsa sphæræ cubicatione, & uersione cubi in sphæram æqualem: Illorúmque augmẽtationem, seu diminutionem, atque tam ipsius sphæræ quàm circuli sectionem, sub ratione data comprehendit.

DE DIVINA PROPORTIONE, QVAE IN LINEA recta per mediam & extremam rationem diuisa continetur,

AVTHORIS DISTICHON.

Si quid diuinum condebat pulchra Mathesis,
Quod Geometra colat: hæc tibi sola dabit.



ORONTII FINAEI DELPHINATIS, REGII MATHEMATICARVM LVTETIAE PROFESSORIS, DE REBVS MATHEMATICIS HACTENVS DESIDERATIS, LIBER PRIMVS.

PROPOSITIO I.

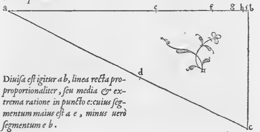
OBlatis duabus lineis rectis inæqualibus: duas medias lineas rectas, sub eadem ratione continuè proportionales, in primis reddere notas.

1 ¶ QVA RATIONE MATHEMATICA *hoc dignißimum ac utile problema dissoluatur, nemo hactenus sufficienter tradidisse uidetur: tametsi Græcorum quamplurimi, nõ aspernandi philosophi atque mathematici, ut illud explicarẽt problema, quod cubi duplicatio dicitur, uariis ac subtilibus admodum inuentis, easdem lineas proportionales tentarint exprimere.* Quemadmodum ex Eutocio Ascalonita Archimedis interprete, & Georgio Valla Placentino, *qui singulorum exposuerunt adinuentiones, colligere haud difficile est. Nullus siquidem eorundem Græcorum authorum offendetur, qui in disquirendis eiuscemodi lineis proportionalibus, uiam aliquam certam obtinuerit: utpote, qui regulamentorum quorundam adminiculo, tentando, uel potius hinc inde palpitando, totiésque conceptas iterando descriptiones, proprias adinuentionum traditiones suspectas, inexplicabilésque reddiderint. Nos igitur præfatas lineas rectas, inter datas extremas continuè proportionales (ne mathematica simulatque suscepti negotij uioletur integritas) uia hactenus à nemine tentata, ex fidißimis Geometricorum elementorum rudimentis, multifariam, ac prima fronte conabimur reddere notas: idque potißimum illius diuinæ proportionis adminiculo, qua data linea recta sic diuiditur, ut in illa medium & extrema continuæ proportionis (quæ in tribus ad minus uidetur consistere terminis) inueniatur. Huius præterea diuinæ proportionis beneficio, ut quinque regularium corporum ab Euclide conciliata est harmonia: sic & nos bonam partem eorum, quæ in ipsis desiderabantur* Mathema-

ticis, tandem absoluimus, ut ex iis quæ sequuntur fiet manifestum. Admirabiles etenim rationum compositiones, similitudinésue, data linea recta in sese complecti uidetur, quæ proportionaliter, seu media & extrema ratione diuiditur. Prius quàm igitur ad propositam rectarum linearum, inter datas extremas continuè proportionalium, deueniamus inuentionem: operæpretium esse uidetur exprimere, qualiter data quæuis linea recta, in quotcunque segmenta inuicem proportionalia diuidatur, iuxta uidelicet trigesimæ sexti elementorum traditionem.

¶ Qualiter data quæuis linea recta, in quotcunque segmenta inuicem proportionalia diuidenda sit.

¶SIT IGITVR DATA LINEA RECTA, SV- 2
prascripto modo diuidenda, a b: & à puncto b, illius uidelicet extremo limite, in quem minora expedierit finire segmenta, ipsi a b, perpendicularis excitetur b c, per undecimam primi elementorum, quæ dimidio eiusdem a b, sit æqualis. Et connectatur a c, linea recta: à qua secetur recta c d, eidem b, æqualis, atque reliquæ d a, æqualis a e, per tertiam ipsius primi elementorum. Aio rectam a b, diuisam esse proportionaliter in puncto e: sicut quidem a b, tota ad segmentum a e, sic idem segmentum a e, ad reliquum e b. Contentum enim sub a b, & b e, rectangulum, æquum est ei quod ex a e, quadrato describitur, per undecimam secundi elementorum: & per decimamseptimam sexti eorundem elementorum, est ut a b, ad segmentum a e, sic idem segmentum a e, ad reliquum c d.



Diuisa est igitur a b, linea recta proportionaliter, seu media & extrema ratione in puncto e: cuius segmentum maius est a e, minus uerò segmentum e b.

Cùm

Cùm autem præfata segmenta proportionalia, sub discretis operæpretium fuerit habere quantitatibus (saltem quantum ars ipsa patitur numerorum) ducenda erit a b in seipsam, & dimidium eiusdem a b, eiusmodi est b c, per seipsum itidem multiplicandum, & ambo quadrata in unum componenda numerum: cuius radix quadrata, erit ipsius a c longitudo, per 47 primi elementorum. Ex qua quidem a c, demenda erit b c, hoc est, ipsius a b dimidia: relinquetur enim segmentum maius a e. Idem porrò segmentum a e, subductum ex tota a b, relinquet segmentum minus e b. Et quoniam si recta linea proportionaliter diuidatur, & segmentum illius maius toti lineæ in directum componatur: consurgit linea itidem proportionaliter diuisa, cuius segmentum maius est ipsa linea à principio data, minus uerò segmentum idem segmentum maius ita compositum, per quintam tredecimi elementorum. Igitur à conuersa ratione, cuiuslibet lineæ rectæ proportionaliter diuisæ segmentum minus, est segmentum maius proportionale segmenti maioris ipsius lineæ datæ: Et quod per subtractionem eiusdem segmenti minoris ab ipso maiori segmento relinquitur, est maius segmentum proportionale eiusdem segmenti minoris. Et proinde si à maiori segmento a e, ipsius a b, lineæ datæ, auferatur cohærens segmentum minus e b, relinquetur segmentum maius e f, ipsius segmenti minoris e b: Quo detracto ab eodem segmento minori e b, relinquetur segmentum minus f b, præfati segmenti minoris e b. Et si idem segmentum minus f b tollatur ex maiori segmento e f, relinquetur, segmentum maius f g: Quod detractũ ex ipso f b, relinquet segmentũ minus g b. Et deinceps in hunc modum quantum libet: ut de reliquis segmentis proportionalibus g h, h b, & h i, i b, periculum facere licet. Hoc igitur artificio, data quæuis alia linea recta, in quotcunque segmenta proportionalia pendenter diuidetur.

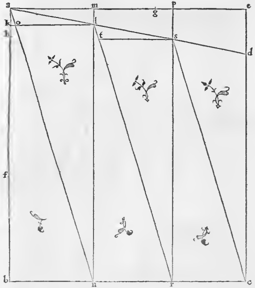
¶ Pars prima constructionis, ubi datarum linearum minor, dimidium maioris superauerit.

3 ¶HIS IN HVNC MODVM PRAELIBATIS, *post innumeras, ac penè incredibili studio, assiduàque meditatione excogitatas prædictarum linearum adinuentiones, aliquot demum tibi*

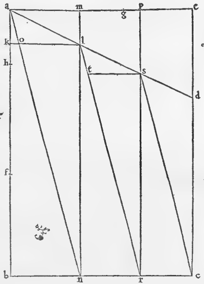
a ij

selegimus, cæteris omnibus tum constructionis facilitate, tum demonstrationis certitudine præstantes. Vt igitur rem ipsam acu tangamus, & à particularibus ad uniuersalia descendamus præcepta, animaduertenda est minoris oblatarum linearum ad maiorem habitudo, siue relata quantitas: nam prout ipsa minor linea uariam partem quotam ipsius maioris effecerit à numero pariter pari denominatam, utpote, secundam siue dimidiam, quartam, uel octauam, aut similem, uel inter earundem partium quotarum distinctiones limitata ciderit, uariandum erit utcunque ipsius inuentionis siue constructionis artificium: quanquam ipsa demonstrationis resolutio uno & eodem discursu indifferenter prosequenda uideatur. Sit itaque datarum & inæqualium linearum maior a b*, minor uerò* c d *ipsius maioris in primis superans dimidium: & ipsas medias quæ inter datas extremas futuræ sunt continuè proportionales, in eo doceamus colligere rectangulo, quod sub ipsis datis lineis rectis continetur. Sit autem rectangulum sub eisdem* a b *&* c d *comprehensum* a b c e*: & diuidatur* a b *proportionaliter, seu media & extrema ratione in puncto* f*, cuius segmentum maius sit* a f*: similiter & ipsa* a e *proportionaliter diuidatur in puncto* g*, cuius segmentum maius sit* a g*, per* 30 *sexti elementorum, aut nuper expressum documentum. Et quoniam* a b *maior est ipsa* a e*, per hypothesin: maius est propterea segmentum* a f*, ipso* a g*. A maiori itaque* a f*, ipsi* a g *minori æqualis secetur* f h*: & residua* h a *proportionaliter diuidatur in puncto* k*, cuius segmentum maius sit* a k*, minus uerò* k h*. Per punctum deinde* k*, ipsi* a e *parallela ducatur* k l*, per* 31 *primi elementorum, quæ secet connexam* a d *lineam rectam in ipso puncto* l*. Per idem rursum punctum* l*, ipsi* a b *parallela ducatur* m l n*: & connectatur* a n *linea recta, quæ secet ipsam* k l *in puncto* o*. Ipsi postmodum* l o *æquales secentur* m p *&* n r*: & connectatur* p r *linea recta, quæ secet ipsam* a d *rectam in puncto* s*. Connexa post modum* l r *linea recta, per ipsum punctum* s *eidem* a e *parallela ducatur* s t*, quæ secet* l r *in ipso puncto* t*. Per idem rursum punctum* s*, ipsi* t r *parallela ducatur* s c*: cadet enim præfata parallela, eritque recta* s t *ipsi* r c *æqualis, ut ipsa naturalium linearum (quæ mathematicarum sunt imagines) te docebit experientia: dum modo exactè diligentérque adimpleueris singula, tam in construendo rectangulo* a b c e*, quàm diuidendo præfatas*

fatas lineas a b, a e & a h proportionaliter: minimus nanque defectus in principio, maximum tandem procreabit errorem. His ita constructis, aio rectas l n & s r, inter datas a b & c d lineas rectas, sub eadem ratione fore continuè proportionales: sicut quidem a b ad ipsam l n, sic eadem l n ad ipsam s r, atque eadem s r ad minorem c d, quemadmodum infra manifestum efficiemus.

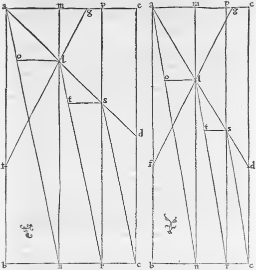


In maiorem autem huiusce primæ partis confirmationem, sequentem iuuat superaddere descriptionem: in quâ minor datarum rectarum, utpote c d, ab ea quæ in prima figura sensibiliter uidetur esse diuersa. Qualium enim partium maior a b est 6, talium minor c d in præcedenti figura est 5, in hac uerò sequenti 4. Variatis nanque sensibiliter datarum linearum quantitatibus, & in unam coincidentibus descriptionis formulam: fieri non potest, quin præmissæ traditionis ueritas ex omni parte subsequatur.



¶ Secunda pars, quando minor linea dimidium est maioris, uel ipso dimidio minor, sed quarta ipsius maioris parte maior.

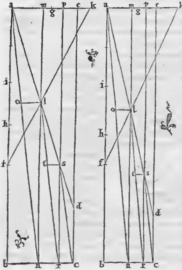
4 ¶ QVOTIES AVTEM DATARVM RECTArum minor, *dimidium fecerit ipsius maioris, ipsóue dimidio fuerit minor, sed maior quarta eiusdem maioris parte, fuerítque pretium operæ inuenire duas rectas inter datas extremas continuè proportionales: id paulò utcunque leuiori absoluetur artificio, in hunc uidelicet modum.* Exponantur rursum binæ lineæ rectæ, quarum maior sit a b, minor autem c d, ipsius maioris in primis dimidia. Et describatur rectāgulum a b c e, *sub ipsis lineis datis, uelut antea, comprehensum: & connectatur* a d *linea recta.* Diuidatur *postmodum* a b *recta proportionaliter, seu media & extrema ratione in puncto* f, *cuius segmentum maius sit* a f: *& huius segmenti dimidio, æqualis secetur* a g, *& connectatur* f g *linea recta, quæ secet* a d *rectam in puncto* l. *Per punctum consequenter* l, *ipsi* a b *parallela ducatur* m l n: *& connexa recta* a n, *per idem punctum* l *ipsi* a e *parallela ducatur* l o, *quæ secet* a n *rectam in ipso puncto* o. *Consequenter, ipsi* l o *æquales secentur* m p *&* n r: *& connectatur* p r *linea recta, quæ secet rectam* a d *in puncto* s. *Connexa deinde recta* l r, *per idem punctum* s, *eidem* a e *parallela ducatur* s t, *quæ secet* l r *in ipso puncto* t. *Et per idem punctum* s *eidem* l r *parallela ducatur* s c: *cadet enim huiusceemodi parallela in ipsum punctum* c, *eritque eadem* s t *linea recta æqualis ipsi* r c. *Hac autem ita se habere, ocularis te docebit experientia: dummodo in ipsius* a b c e *rectanguli constructione, atque proportionali diuisione supradictæ lineæ* a b, *nullum commiseris errorem.* Erit itaque rursum l n *secunda proportionalis, &* s r *tertia, inter* a b *&* b c *lineas datas: sicut uidelicet maior* a b *ad ipsam* l n, *sic eadem* l n *ad ipsam* s r, *atque eadem* s r *ad minorem* c d. Quod unà cum reliquis huiusce propositionis partibus uniuersaliter ostendemus. In clariorem autem huiusce partis elucidationem, & confirmatio nostræ traditionis, alteram placuit annectere figuram: in qua minor datarum rectarum, utpote c d, continet tres partes, qualium maior a b est 8. Ex iteratis nanque oblatarum linearum diuersitatibus, in eandem constructionis coincidentibus harmoniam, præcepti ueritas elucescit.



¶ Tertia pars constructionis, cùm data linea minor est quarta, uel ipsa quarta minor, sed maior 8 parte maioris.

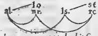
¶ AT SI MINOR EARVNDEM OBLATArum, *rectarum quartam partem fecerit eiusdem maioris, uel ipsa quarta minus, sed plus octaua eiusdem maioris parte: hac uia procedendum est. Esto rursum datarum rectarum maior a b, minor uerò c d, sub data hypothesi proportionata: & describatur a b c e rectangulum, sub ipsis lineis datis comprehensum, connectatúrque a d linea recta. Diuidatur consequenter a b proportionaliter in puncto f, cuius segmentum maius sit a f: similiter & ipsa a e proportionaliter diuidatur in puncto g, cuius segmentum maius sit a g. Secetur postmodum ipsi a g æqualis f h:*

fb: & residua h a proportionaliter diuidatur in puncto i, cuius segmentum maius sit a i. Huius autem segmenti maioris dimidio æqualiter secetur e k: producta a e in directum, ad partes e uersus k. Et connectatur f k linea recta, quæ secet a d rectam in puncto l. Per punctum igitur l ipsi a b parallela ducatur in l n: & connexa a n recta, per idem punctum l ipsi a e parallela describatur l o. Deinde ipsi l o æquales secentur m p & n r: & connectatur p r linea recta, quæ secet a d in puncto s. Per punctum autem s ipsi a e parallela ducatur s t: ipsi uerò l r parallela s c. Cadet enim rursum s c in ipsum punctum c, ut in proximis dictum atque obseruatum est descriptionibus: eritque l n secunda proportionalis, s r uerò tertia, inter a b & b c lineas datas. Veluti quamprimùm mathematica deductione manifestum efficiemus. Huius itaque præcepti, in maiorem omnium fidem, nostríque inuenti confirmationẽ, duas libuit construere figuras: in quarum prima, datarum rectarum minor c d est quarta pars ipsius maioris a b: in secunda uerò figura, eadem minor c d est trium partium, qualium ipsa maior a b est 8. Haud aliter de cæteris facito, atque iudicato.

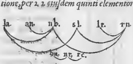


¶ Trium antecedentium deſcriptionum, ſiue partium demonſtratio.

¶QVOD AVTEM IN VNAQVAQVE TRIVM 6
antecedentium partium ſiue deſcriptionum, recta l n, ſit ſecunda proportionalis, & s r tertia, inter datas extremas a b & c d, ſicut uidelicet a b ad ipſam l n, ſic eadem l n ad præſatam s r, atque eadem s r ad minorem c d: in hunc qui ſequitur modum demonſtratur. In primis enim triangula a b n, l n r, s r c ſunt inuicem æquiangula, ſimiliter & triangula a l n, l s r, s d c, necnon triangula a l o, l s t: quemadmodum ex uigeſima nona & trigeſimaſecunda primi elementorum, fit apertè manifeſtum cùm lineæ rectæ a b, m n, p r, e c, ſimiliter a n, l r, s c, atque l o, s t, & b c, tum per ipſam conſtructionem, tum per 33 ipſius primi elementorum, parallelæ ſint adinuicem. Aequiangulorum porrò triangulorum proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos: atque ſimilis rationis quæ æqualibus angulis latera ſubtenduntur, per quartam ſexti elementorum. Eſt igitur ut a l ad l o, ſic l s ad s t. Ipſi autem l o æqualis eſt n r, atque ipſis s t æqualis r c, per ipſam conſtructionem: & æquales ad eandem habent eandem rationem, & eadem ad æquales, per

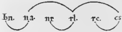


ſeptimam quinti elementorum. Sicut igitur a l ad n r, ſic l s ad r c. Et permutatim quoque per ſedecimam eiuſdem quinti elementorum, ut a l ad ipſam l s, ſic n r ad r c. Eſt præterea ut a n ad n b, ſic l r ad r n: atque ſicut l a ad a n, ſic s l, ad l r. Et ex æqua igitur ratione, per 22 eiuſdem quinti elementorum, ut l a ad n b, ſic l s ad r n. Et permutatim rurſum per ſedecimam ipſius quinti, ut a l ad l s, ſic b n ad n r. Oſtenſum eſt autem, ut a l ad l s, ſic n r ad r c:

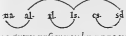


& quæ eidem ſunt eædem rationes, adinuicem ſunt eædem, per undecimam eiuſdem quinti elementorum. Eſt igitur, ut b n ad n r, ſic eadem n r ad r c: & proinde tres lineæ rectæ b n, n r, r c, continuè ſunt proportionales. Inſuper, cùm ſit ut b n ad n a, ſic n r ad r l, & r c ad c s, & tres antecedentes b n, n r, r c continuè ſunt proportionales: igitur & conſequentes

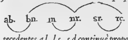
n a,



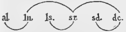
n a, r l, c s, ſicut quidem n a ad r l, ſic eadem r l ad c s. Item cùm ſit ut n a ad a l, ſic r l ad l s, & c s ad s d, & tres antecedentes n a, r l, c s ſunt continuè proportionales: igitur & tres conſequentes a l, l s, s d continuè itidem proportionales erunt, ſicut uidelicet a l ad l s, ſic eadem l s ad ipſam s d.



Cæterũ cùm ſit ut a b ad b n, ſic l n ad n r, & r s ad s c, & tres conſequentes b n, n r, r c continuè ſunt proportionales: erunt ſimiliter antecedentes continuè proportionales, ſicut uidelicet a b ad l n, ſic eadem l n ad r s. Tandem



cõſtat eſſe ut a l ad l n, ſic l s ad s r, & s d ad d c, & tres rurſum antecedentes a l, l s, s d continuè proportionales exiſtunt: igitur & tres conſequentes, ſicut l n ad s r, ſic eadem s r ad d c. Præoſtenſum eſt autem, ut l n ad s r, ſic a b ad eandem l n.



Quatuor itaq; a b, l n, s r, d c, ſub eadem ratione continuè proportionantur: ſicut uidelicet a b ad l n, ſic eadem l n ad s r, atque eadẽ s r ad ipſam d c. Quod oportuit demonſtraſſe.

¶ Aſſumpti in præmiſſa demonſtratione confirmatio.

7 ¶ QVOD AVTEM SEX MAGNITVDINIBVS *inuicem proportionalibus datis, ſi tres antecedentes fuerint continuè proportionales, tres conſequentes continuam itidem cogantur obſeruare proportionem, & è conuerſo: ſic confirmatur. Sint datæ ſex magnitudines a b c d e f inuicem proportionales, ſicut quidem a ad b, ſic c ad d, & e ad f: ſintq́ue in primis antecedentes a c e continuè proportionales, ſicut uidelicet a ad c, ſic eadem c ad e: dico quod ipſæ conſequentes b d f, continuè itidem proportionales erunt, ſicut b ad d, ſic d ad f. Cùm enim ſit ut a ad b, ſic c ad d: erit permutatim, per ſedecimã quinti elementorum, ut a ad c, ſic b ad d. Vt autem a ad c, ſic c ad e, per hypoteſin: & ſicut igitur per undecimam quinti elementorum, b ad d, ſic c ad e. Cùm ſit rurſum, ut c ad d, ſic e ad f: erit quoque permutatim, per eandem ſedecimam quinti elemento-*



rum, ut c ad e, sic d ad f. Ostensum est autem, ut c ad e, sic b ad d: & sicut igitur per undecimam eiusdem quinti elementorum, ut b ad d, sic d ad f. Tres igitur consequentes d, e, f, sub continua proportione colligantur. Haud dissimiliter ostendetur, tres antecedentes fore



proportionales: ubi tres consequentes continuam obseruauerint proportionem. Assumptum igitur in præmissa demonstratione, ex omni parte uerum.

¶ Quarta pars eiusdem constructionis, ubi datarum rectarum minor fuerit octaua pars maioris, uel ipsa octaua parte quantumlibet minor.

¶PORRO DVM MINOR LINEA FVERIT *præcisè pars octaua maioris, clarum est in primis ipsius maioris dimidium efficere lineam secundam, & quartam eiusdem maioris partem conficere tertiam proportionalem inter ipsas lineas datas. Sicut enim maior ad dimidiam eius partem, sic dimidia ad quartam, & ipsa quarta ad octauam: ubique enim ratio dupla continuatur.* 8

Pro lineis autem minoribus ipsa octaua parte maioris, unicum tantum uelim accipias documentum, etiam cuiuscunque quantitatis fuerit ipsa minor infra octauam partem maioris. Sumenda est igitur ipsius datæ lineæ minoris octupla, & inter illam & maiorem lineam secunda proportionalis elicienda, per aliquod uidelicet trium antecedentium documentorum, pro ipsius octuplæ contingente magnitudine: nam dimidium eiusdem secundæ proportionalis, erit secunda proportionalis inter maiorem & ipsam minorem lineam datam. Hinc per tredecimam sexti elementorum, facile erit inuenire tertiam. Exemplaris huiusce documenti ueritas, desumi potest ex ipsa octaua parte maioris. Vtpote, si maior fuerit partium (uerbi gratia) 60: illius pars octaua habebit partes 7 & $\frac{1}{2}$, quæ multiplicata per 8, reddunt 60. Atqui inter 60 & 60, media proportionalis est pariter 60: nempe sub æqualitatis ratione. Et 30 sunt dimidium ipsorum 60: & simul faciunt secundam proportionalem inter 60 partes maioris, & 7 partes cum $\frac{1}{2}$ octauæ partis eiusdem maioris, uti suprà dictum est.

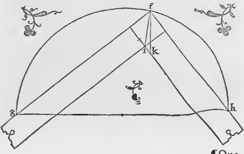
Haud

Haud aliter uelim ſubintelligas, de cæteris lineis ipſa octaua parte minoribus. Verùm hæc ad eas tantummodo uidentur ſpectare lineas, quarum octuplæ ipſam octauam partem maioris excedunt. Nam ſi octupla minoris lineæ datæ, minor fuerit octaua parte maioris, ſumenda eſt ipſius minoris ſedecupla, & inter illam & maiorem lineam colligenda ſecunda proportionalis, uti ſupra dictum extitit: illius enim quarta pars, erit ſecunda proportionalis optata. Et in hunc modum pendenter de cæteris, obſeruata multiplicatione minoris per numeros pariter pares ſupra octonarium numerum: donec conſurgat linea recta, quæ ſit maior octaua parte ipſius maioris lineæ datæ. Si ea igitur per 32 multiplicetur, octaua pars inuentæ ſecundæ proportionalis erit ſecunda proportionalis deſiderata: & ſi per 64, ſedecima: & ſic in infinitum. Et proinde ſi linea minor, fuerit ſedecima pars maioris: dimidium ſecundæ proportionalis, quando ipſa minor eſt dimidia maioris, erit ſecunda proportionalis optata. Et ſi eadem minor fuerit ipſius maioris trigeſimaſecunda pars: dimidium ſecundæ proportionalis, dum minor eſt quarta pars eiuſdem maioris, erit ſecunda proportionalis inter maiorem & ipſam lineam datam. At ſi eadem minor, fuerit pars ſexageſimaquarta maioris: tunc ſecunda proportionalis optata, erit dimidium ſecundæ proportionalis, dum ipſa minor faciet octauam eiuſdem maioris partem. Si denique minor fuerit centeſima uigeſima octaua pars eiuſdem maioris lineæ: ſecunda proportionalis erit dimidium ſecundæ proportionalis, dum ipſa minor eſt pars eiuſdem maioris ſedecima: & proinde quarta pars, cùm eadem minor linea ipſius maioris eſt dimidia. Et in hunc modum conſequenter de cæteris: quod ſumma animaduerſione dignum eſſe uidetur.

PROPOSITIO II.

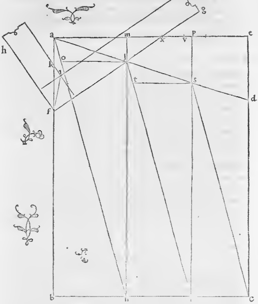
GNomonem fabricare rectangulum, quo præfatæ deſcriptiones earundem linearum rectarum, inter datas extremas continuè proportionalium, expeditè fidelitérque abſoluentur.

¶ FABRICETVR ERGO EX SOLIDA QVA- 1
piam & electa materia, ueluti cupro uel aurichalco, gnomon rectangulus g f h, sub duobus regulamentis g f & f h, altera parte longioribus, & pro futurarum linearum magnitudine proportionatis comprehensus. Quorum regulamentorum crassitudo sit mediocris, & latitudo prorsus eadem: alterius tamen longitudo, utpote ipsius g f, alterius scilicet g h longitudine utcunque maior existat. Ad angulum autem rectum qui ad f, quadratum figuretur, cuius diameter sit f i: & unumquodque latus prædictorum regulamentorum, siue brachiorum latitudini adamussim coæquetur. Vnum deinde laterum eiusdem quadrati (nec refert quale) proportionaliter, seu per mediam & extremam rationem diuidatur: & segmento minori eiusdem lateris, æqualis secetur i k, in interiori scilicet minoris brachij latere. Connectatur demum recta linea f k, totius rei thesaurus: & absolutum erit propositum gnomonis instrumentum, quod (citra affectionem) futura admirabuntur secula. Cum illo nanque, nedum propositarum linearum inter datas extremas continuè proportionalium inuentionem promptissimè poteris absoluere: sed & datum quemuis circulum in quadratum æquale, aut è conuerso (ut infrà docebitur) non minus facilè conuertes. Dignoscetur autem an angulus g f h sit rectus, si descripto semicirculo, & posito f uertice in illius periphæria, duo latera f g & f h per dimetientis extrema siue limites transierint: quoniam angulus qui in semicirculo rectus est, per 31 tertij elementorum.



¶ Qualiter præfati gnomonis adminiculo, binæ lineæ rectè inter datas extremas continuè proportionales statim colligantur: Et primò, ubi datarum rectarum minor, ipsius maioris superauerit dimidium.

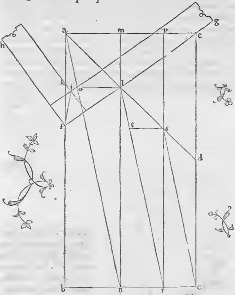
2 ¶SINT IGITVR (VT AD IPSIVS GNOMOnis usum deueniamus) *oblatæ lineæ rectæ a b & c d: quarum maior sit a b, minor uerò c d, ipsius maioris in primis excedens dimidium: inter quas rectas, operæpretium sit inuenire duas medias, sub eadem ratione continuè proportionales. Describatur itaque parallelogrammum rectangulum a b c e, sub ipsis lineis datis comprehensum: & connectatur a d linea recta, ut in singulis figuris antecedentis primæ propositionis obseruatum extitit. Dimidio postmodum ipsius maioris a b æqualis secetur ex a e, ab ipso quidē puncto a uersus e, quæ sit a u: & reliqua pars u e, in tres partes inuicem æquales diuidatur. Consequenter uni tertiæ parti eiusdem u e, æqualis secetur ab ipso puncto u uersus a, quæ sit u x. Applicetur deinde recta linea f k ipsius gnomonis g f h, directè super maiorem lineam a b, moueaturque gnomon paulatim, uel ad partes a, uel ad partes b, immota semper f k linea gnomonis ab eadem a b: quatenus latus f g transeat ad amussim per punctum x. Quo facto, noteturse ctio eiusdem lateris f g, cum a d linea recta: quæ sit rursum l. Et per punctum l, ipsi a b parallela ducatur m l n: connectatúrque recta a n. Per idem rursum punctum l, ipsi a e parallela ducatur l o: atque ipsi a n parallela l r. Deinde per punctum r, eidem m l n parallela ducatur p r: quæ secet ipsam a d rectam, in puncto s. Pers denique punctum, eidem a e parallela ducatur s t: ipsi autem l r, itidem parallela s c. Nam si debitè gnomonem fabricaueris, ad amussimque obseruaueris singula quæ nunc expressimus, coincidet eadem ultima parallela in punctum c: eritque l n secunda, s r autem tertia proportionalis, inter a b & b c lineas datas. Quod per æquiangula triangula non aliter ostendetur, quàm de præfatis ipsius antecedentis primæ propositionis conclusum est figuris: ueluti sequens descriptio monstrat, in qua minor c d est trium partium, qualium maior a b est quatuor. Idem quoque subsequetur, ubi eadem minor sub quacunque ratione ipsius maioris superauerit dimidium.*



¶ Cùm minor linea, præcisè facit ipsius maioris dimidium.

¶ AT SI MINOR DATARVM LINEARVM VT- 3
pote c d, fuerit ipsius maioris a b dimidia: describatur iterum rectangulum a b c e sub ipsis datis lineis rectis comprehensum. Et connexa a d *linea recta, applicetur recta f k ipsius gnomonis g f h directè super lineam maiorem a b: moueatúrque gnomon uersus a aut uersus b, quatenus latus f g coincidat in punctum e: notetúrque sectio eiusdem lateris f g cum ipsa a d linea recta, quæ sit rursum in puncto l.* Compleatur denique

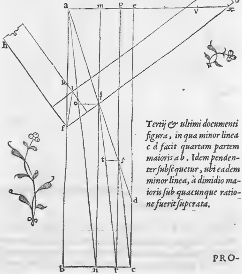
denique figura, uti nuper traditum est, & subscripta delineatio mõstrat. Habebis enim rursum l n secundam, & s r tertiam proportionalem inter a b & c d lineas à principio datas.



¶ Dum minor linea, dimidio maioris sub quacunque ratione fuerit minor.

✝ ¶ VBI PORRO MINOR DATARVM RECTArum c d, *non fecerit dimidium ipsius maioris a b, etiam sub quacunque ratione ipso dimidio fuerit minor: fiat rursum parallelogrammum rectãgulum sub ipsis a b & c d comprehensum, una cum subtensa a d linea*

recta. Producatur consequenter latus a e in directum & continuum ad partes e, uersus u: & dimidiæ parti ipsius maioris a b, æqualis secetur a u. Differentia autem e u, bifariam diuidatur: & dimidio ipsius e u, æqualis secetur u x. Tādem recta gnomonis f k, in directum ipsius a b solito more constituatur: cogatúrque latus f g transire per punctum x, immota semper f k ab eadem a b. Sectio denique lateris f g cum ipsa a d recta sit rursum l: & compleatur figura, uti suprà dictum atque obseruatum extitit. Erit enim l n secunda, & s r tertia proportionalis, inter a b & c d lineas datas. Cuius demōstratio ex ipsa triū cōstructionū antecedentis primæ propositionis ostēsione colligēda est: utpote, quæ utriq; modo & cum ipso gnomone, & absq; gnomonis officio, cōmunis esse uidetur.



Tertij & ultimi documenti figura, in qua minor linea c d facit quartam partem maioris a b. Idem pendenter subsequetur, ubi eadem minor linea, à dimidio maioris sub quacunque ratione fuerit superata.

PRO-

PROPOSITIO III.

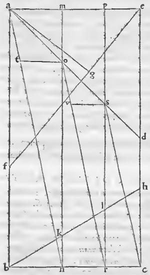
EAsdem lineas medias, inter datas extremas continuè proportionales, aliter inuenire.

1 ¶ALITER QVIDEM POLLICEMVR, EIVSCEmodi linearum proportionalium inuestigationem: sed eo nihilominus artificio, ut antecedentis primæ propositionis demonstratio, in huiusce propositionis ostensionem subrogetur. Si quæ igitur fuerit differentia ea ex ipsa constructione pendebit. Supponemus itaque primùm (ut rem paucis expediamus) datarum rectarum minorem, dimidium ipsius maioris præcisè conficere: & ex ea linea recta, cuius pars erit secunda proportionalis, reliquas secundas proportionales truncare, atque ipsam tertiam pendenter elicere docebimus, dum scilicet minor linea data, fuerit maior, aut minor ipsa maioris dimidia: Idque in parallelogrammis rectangulis, quæ sub maiore datarum rectarum, & proportionatis lineis rectis (in locum datarum minorum subrogatis) comprehendentur.

¶Prima pars succedentium origo, præsupponens minorem datarum rectarum ipsius maioris esse dimidium.

2 ¶SIT IGITVR MAIOR DATARVM RECTArum a b, minor uerò c d, ipsius maioris in primis dimidia. Et describatur parallelogrammum rectangulum a b c e, sub eisdem rectis comprehensum: connectaturque recta a d. Diuidatur postmodum a b recta proportionaliter, seu media & extrema ratione in puncto f, cuius segmentum maius sit a f, minus uerò f b, per 30 sexti elementorum, uel antecedentis primæ propositionis generale documentum: connectaturque recta a d, atque f e. Deinde à puncto a in ipsam f e, perpendicularis deducatur a g, per 12 primi elementorum. Et quoniam rectangulum est triangulum f a e: erit a g media proportionalis inter f g & g e segmenta basis f e, per corollarium octauæ sexti elementorum. Dimidio consequenter segmenti maioris a f, æqualis secetur c h: & connectatur b h linea recta. Dimidio autem ipsius f g æqualis seceturb k, & dimidio ipsius a g æqualis k l, atque dimidio ipsius g e æqualis l h: erit enim reliqua l h dimidio ipsius g e (res profectò mira) ad amussim æqualis.

Per puncta igitur k l, ipsi a b parallelæ ducantur m n & p r, per 31 primi elementorum: secétque m n ipsam a d lineam rectam in puncto o, & p r in puncto s. Eruntitaque o n & s r, mediæ proportionales inter a b & c d lineas datas: sicut uidelicet a b ad ipsam o n, sic eadem o n ad ipsam s r, & eadem s r ad minorem c d.



¶ Quæ spectant ad huiusce constructionis demonstrationem.

¶ CONNECTAN- 3
tur itaque a n, o r, s c lineæ rectæ: & per puncta o & s, ipsi a e parallelæ ducantur o t & s u, secétque o t ipsam a n in ipso puncto t, & s u ipsam o r in ipso puncto u. Cum enim tres lineæ rectæ f g, g a, g e, continuè (ut prædictum est) sint proportionales, erunt ipsarum dimidiæ b k, k l, l h, continuè itidem proportionales: partes enim & æquè multiplices, eandem rationem habēt sumptæ adinuicē, per 15 quinti elementorum. Sicut igitur b k ad ipsam k l, sic eadem k l ad ipsam l h. In triangulo autem b c h, ad latus c h actæ sunt parallelæ k n, l r, per constructionem: sunt igitur ipsius trianguli latera b c & b h diuisa proportionaliter per secundam sexti elementorum. Si intelligantur porrò a d & b c lineæ rectæ, in continuum & directum productæ, ad partes quidem c d: illæ de necessitate conuenient tandem adinuicem, faciéntque triangulum, ad cuius latus a b aguntur rursum parallelæ o n, s r, d c: secant

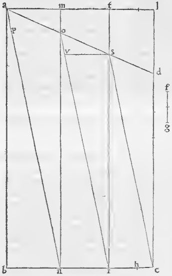
igitur

igitur proportionaliter ipsius trianguli latera, per eandem secundam sexti elementorum. Est igitur ut a o ad o s, sic b n ad n r: sicut praeterea o s ad s d, sic n r ad r c. Est autem ut b n ad n r, sic eadem n r ad r c: & sicut igitur per undecimam quinti elementorum a o ad o s, sic n r ad r c. Trianguli igitur, quod ex concursu ipsarum a d & n c in continuum & directum productarum cum ipsa a n efficitur, latera a d & n c diuiduntur proportionaliter in punctis o s & r c: Ad segmenta igitur connexae lineae rectae o r & s c, parallelae sunt ad reliquum latus a n, per secundam partem eiusdem secundae sexti elementorum. Et proinde o t n r & s u r c quadrilatera, sunt parallelogramma: & latera consequenter o t & n r, similiter s u & r c inuicem aequalia, per 34 primi eorundem elementorum. Hinc per 29 & 32 ipsius primi elementorum, triangula a b n, o n r, s r c, similiter triangula a o n, o s u, s d c, atque triangula a o t, o s u, similia concludentur adinuicem: ut in tribus constructionis partibus antecedentis primae propositionis. Per ipsarum itaque partium communem demonstrationem, continua praedictarum linearum o n, s r cum datis extremis a b & c d proportio concludetur: sicut uidelicet a b maior ad ipsam o r, sic eadem o r ad ipsam s r, atque eadem s r ad minorem c d. Quod construendum & demonstrandum susceperamus.

¶Secunda pars de lineis datis, quarum minor dimidium maioris excedit.

4 ¶CVM AVTEM LINEA MINOR, DIMIDIVM *ipsius maioris superauerit: duae proportionales intermediae, in hunc qui sequitur modum colligentur. Esto rursum maior datarum rectarum a b, minor autem c d, trium (uerbi gratia) partium qualium eadem a b est quatuor. Sit praeterea differentia, qua minor c d excedit ipsius maioris dimidium, recta d e: quae proportionaliter diuidatur, & inter illius segmenta media proportionalis inueniatur, quae sit f g. Ipsius deinde maioris dimidiae parti, utpote b h, in directum constituatur h c, dimidiae parti eiusdem mediae proportionalis f g ad amussim aequalis: compleaturque rectangulum a b c l sub ipsis a b & b c comprehensum, & connectatur a d linea recta. Fiat postmodum rectangulum, sub eadem a b & illius medietate contentum: eliciaturque ipsius*

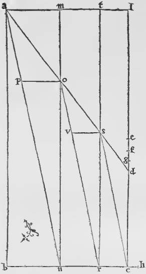
a m seu b n longitudo, ut in prima huius parte traditum est: quibus æquales secentur ex a l & b c, à punctis uidelicet a & b, uersus l & c, quæ a m atque b n itidem uocitentur. Connectantur insuper a n & m n lineæ rectæ: secétque m n ipsam a d rectam in puncto o. Per punctum consequenter o, ipsi a l parallela ducatur o p, quæ secet a n in signo p: ipsi autem a n parallela itidem agatur o r, quæ cadat in punctum r ipsius rectæ b c. Rursum, per punctum r, ipsi m n parallela ducatur r s t, quæ secet eandem a d rectam in puncto s. Tandem, per punctum s eidem a l parallela ducatur s u, quæ secet o r in puncto u: ipsi autem o n parallela itidem agatur s c. Hæc enim parallela, cadet semper in punctum c, quemadmodũ ipsius primæ atque secundæ propositionis prędiximus accidere descriptionibus: dummodò neque in rectangulorum cõstructione, neque in sumendis lineis proportionalibus, nullus error, quãtumuis etiam modicus, committatur. His in hunc modum constructis, aio rursum o n & s r lineas rectas, fore medias proportionales inter a b atque c d lineas datas: sicut uidelicet maior a b ad ipsam



ipsam o r, sic eadem o r ad ipsam s r, atque eadem s r ad minorem c d. Hoc autem non aliter demonstrabitur, quàm de lineis l n & s r, in quali trium partium antecedentis primæ propositionis tradidimus: adminiculo uidelicet triangulorum, quæ propter lineas parallelas similia sunt adinuicem. Nulla igitur opus est noua demonstrandi ratione, tam in hac quàm in sequentibus huiusce propositionis descriptionibus.

¶ Tertia pars, ubi datarum linearum minor, non facit ipsius maioris dimidiam, sed plus quarta eiusdem maioris parte.

5 ¶ SI CONTINGAT AVTEM MINOREM DA*tarum rectarum, non facere dimidiam partem ipsius maioris (de qua maioris dimidia, prima huius parte tractatum est) sed quartam partem eiusdem maioris nihilominus superare: haud multum dissimili uia ipsa media proportionales colligentur. Resumatur igitur linea maior a b, unà cum minore c d, septem uerbigratia partium, qualium ipsa maior est sedecim. Et sumatur ipsius minoris atque dimidiæ eiusdem maioris differentia: quæ sit rursum d e. Hac autem differentia (uelut antea dictum est) proportionaliter diuidatur in puncto f, cuius segmentum maius sit d f, per sæpius allegatum prima propositionis documentum, uel 30 sexti elementorum. Idem porrò segmentum maius d f bifariam diuidatur in puncto g, per decimam primi eorundem elementorum. Ab ipsa deinde maioris dimidia, qua sit rursum b h ad rectum angulum cum a b constituta, secetur ipsi d g siue g f, hoc est, dimidio segmenti maioris æqualis h c: & compleatur solito more parallelogrammũ rectangulum a b c l. Tandem absoluantur reliqua omnia lineamenta, quemadmodum in duabus proximis dictum atque obseruatum est figuris siue descriptionibus. Hoc est, desumatur ex maiore a b & dimidia illius parte, ipsius a m seu b n longitudo, iuxta primæ partis huiusce propositionis traditionem: & connectatur a d, a n & m n lineæ recta, ducanturque parallelæ o p & o r, denique r s t, s u & s c. Nam ipsa parallela s c, cadet rursum in punctum c: ut ipsa figuræ delineatio ad amussim obseruata te docebit. Hinc rectas ipsas o n & s r, inter datas extremas a b & c d medias esse proportionales non aliter concludemus: quàm de lineis*



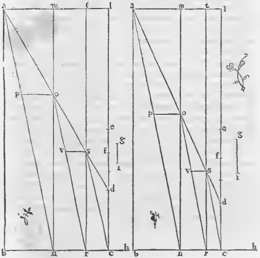
In & s r, iuxta primæ propositionis traditionem adinuentis conclusum extitit, & in proximis descriptionibus obseruatum: per similia uidelicet triangula, cuiusmodi sūt a b n, o n r, s r c, atque a o n, o s r, s d c, necnō a o p & o s u. Haud alienū uelim habeas iudiciū de cæteris minoribus lineis, inter ipsius maioris dimidiam & quartam eius partem cōprehensis.

¶ Quarta pats, cùm linea minor quartam partem ipsius maioris fecerit, uel ipsa quarta minus, sed plus octaua eiusdem maioris parte.

¶ QVOD SI PRAEDICTARVM RECTARVM 6
minor, quartam ipsius maioris partem præcisè fecerit, fueritue ipsa quarta minor, sed maior octaua parte eiusdem maioris: tunc uniuersum constructionis artificium, in colligenda h c iuxta ipsius minoris quantitatē proportionata solummodo uersabitur: cætera enim omnia, ut in præmissis descriptionibus siue figuris ueniunt prorsus imitāda. Sit itaque rursum datarum rectarū maior a b, minor autem c d, ipsius maioris præcisè quarta, uel triū partium qualiū ipsa maior est sedecim (ut simul utrique parti satis faciamus) cuius differentia ab eiusdem maioris dimidia, sit rursum d e. Hæc igitur proportionaliter diuidatur, in puncto quidem f, cuius segmentum maius sit d f, quod rursum bifariam diuidatur, ut in proxima descriptione: sed inter segmentum minus f e, &

dimidium

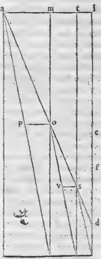
dimidium segmenti maioris s d media proportionalis accipiatur, per 13 sexti elementorum, quæ sit g i. Huic itaque mediæ proportionali, æqualis secetur h c: compleatúrque rectangulum a b c l, sub a b & b c comprehensum. Tandem absoluantur reliqua figuræ lineamenta, mediante a m seu b n, iuxta primæ partis traditionem adinuenta: ut in præmissis omnibus obseruatum extitit partibus. Si enim fideliter atque diligenter obseruentur singula, offendetur tandem in utraque figura, ultima parallelarum r c coincidere in punctum c: & proinde consurgere tot triãgula, quot in præcedentibus figuris, similia adinuicem. Quorum adminiculo, concludetur rursum fore, ut a b ad o n, sic o n ad s r, & eadem s r ad d c: ut in prima parte ipsius primæ propositionis demõstratũ extitit. Omnes etenim partes harũ triũ propositionũ, eadẽ uia prorsus ostẽdũtur.

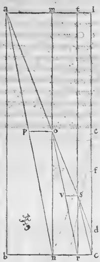


¶Quinta pars, de lineis quarum minor octauam partem maioris efficit, uel ipsa octaua minorem, sed maiorem parte sedecima.

¶HVIVSCE CONSTRVCTIONIS ARTIFI- 7
cium minorem utcunque patitur confusionem, ubi lineæ minores infra octauam partem ipsius maioris comprehenduntur, quàm per ipsius primæ propositionis traditionem exponatur: Vtpote, quoniam interuallum a m seu b n in omnibus huiusce propositionis differentiis semper manet idem, unde cætera interualla m t & t l, seu m r & r c minus coartantur. Quanquam igitur ex supra dictis sit manifestum, dum minor linea data est octaua pars maioris, ipsius maioris dimidium efficere secundam, & quartam illius partem tertiam proportionalem inter ipsas lineas datas: iuuat nihilominus ostendere, qua ratione sæpius expressa linea b c (sub qua & maiore a b solitum describitur rectangulum) colligenda sit, ubi datarum rectarum minor fecerit octauam partem ipsius maioris, uel ipsa octaua minus, sed plus eiusdem maioris parte sedecima. Oblatis itaque duabus lineis rectis a b atque b c, sub nunc citata ratione proportionatis: sumenda est rursum linea recta d e, quæ dimidiæ maioris a b & ipsius minoris lineæ datæ c d sit differentia. Hæc autem recta d e siue differentia, proportionaliter diuidenda est in puncto f, cuius segmentum maius sit d f, minus uero f e. Nam si à maioris dimidia c e auferatur segmentum minus f e, atque ipsi c f æqualis fiat b c, & compleatur de more parallelogrammum rectangulum a b c l, sub ipsa maiore a b & eadem b c, comprehensum, absoluantúrque cætera figuræ lineamenta, ut in præmissis obseruatum atque sæpiùs iteratum fuit descriptionibus: cadet semper ultima parallelarum, quæ per punctum s ducitur, in ipsum punctum c. Hinc quæsita linearum o n & s r cum datis extremis a b & c d proportio concludetur: Vt ex iis quæ sequuntur licet intueri figuris. In quarum prima, linea minor c d est octaua pars ipsius maioris a b: in secunda uerò figura, trium partium, qualium eadem maior est sedecim.

¶Sexta



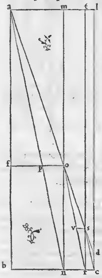


¶ Sexta & ultima pars, de cæteris minoribus lineis, quæ uel sedecimam partem maioris efficiunt, uel infra sedecimam indifferenter comprehenduntur.

8 ¶PRO RELIQVIS DENIQVE LINEIS DA*tis, quarum minor est sedecima pars maioris, uel infra sedecimã partem sub quacunque ratione comprehensa: confugiendum est ad documentum quartæ partis ipsius antecedẽtis primæ propositionis. Illic enim iussimus, eiusce modi lineæ minoris octuplam esse sumendã, & inter illam & maiorem lineã colligendã esse secundã proportionalem, iuxta propriũ ipsius datæ propositionis artificium, pro contingente ipsius octuplæ magnitu-*

c ij

dine. Nam dimidium eiusdem secundæ proportionalis, erit secunda proportionalis inter maiorem & ipsam lineam datam: hinc per 13 sexti elementorum, uel absolutam figuræ descriptionem, facilè colligetur ipsa tertia. Cuius rei iuuat facere periculum de linea c d, quæ sit uerbi gratia sedecima pars ipsius maioris a b. Ex ipso itaque præfatæ quartæ partis eiusdem primæ propositionis corollario, dimidium secundæ proportionalis, quando minor linea est dimidia maioris, facit secundam proportionalem, dum ipsa linea minor eiusdem maioris est pars sedecima. Descripto igitur rectâgulo parallelogrammo a b n m, & a n linea recta, ut in cæteris huiusce propositionis figuris obseruatum extitit: sit dimidium secundæ proportionalis, inter maiorem a b, & dimidiam eius partem, per antecedentis primæ partis traditionem adinuentæ, recta b f. Et per punctû



f, ipsi a m uel b n parallela ducatur f o: quæ secet m n in puncto o, & a n in signo p. Producta deinde b n uersus c, per idem punctum o ipsi a n parallela ducatur o r: & per punctum r, ipsi m n parallela itidem agatur r s t, quæ secet a o in continuum directúmque productam uersus d, in ipso puncto s. Per punctum consequenter s, ipsi b c parallela ducatur s u, quæ secet o r in ipso puncto u: cui quidem s u æqualiter secetur r c. Et connexa c s linea recta, quæ ipsi o r erit de necessitate parallela, per punctum c, eidem r s t, parallela, tandem agatur c d l: in cuius punctum d sedecimæ partis limitem, producta a o s tandem coincidet, eritque c d ipsius maioris a b pars sedecima. Quemadmodum ex ipsa deprehenditur figura, sub lineis (ut uocant) naturalibus, quæ mathematicarum sunt imagines, comprehensa: cuius eadem erit demonstratio, quæ de cæteris ipsius antecedêtis primæ propositionis constructionis tradita est. Reliqua porrò linearum intermedia-

rum

rum discrimina, ex ipso quartæ partis eiusdem primæ propositionis corollario desumenda relinquimus.

PROPOSITIO IIII.

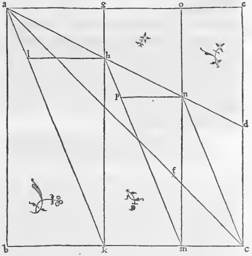
Præfatas lineas intermedias, cum datis extremis continuam obseruantes proportionem, alia ratione colligere.

1 ¶PRAESTAT CONSEQVENTER ALIVM SVBnectere *modum, quo præfatæ lineæ intermediæ cum datis extremis continuè proportionales inueniri poßint: intra uidelicet quadratum, quod ex maiore propositarum rectarum describitur, idque sub tribus tantummodo differentiis. Quarum prima supponit minorem earundem rectarum, ipsius maioris conficere dimidium: secunda uerò ipsum maioris dimidium sub quacunque ratione superare: tertia denique constructionis differentia, erit de lineis minoribus, infra ipsius maioris dimidium sub quauis ratione data comprehensis.*

¶ Prima constructionis differentia, de lineis inæqualibus datis, quarum minor ipsius maioris est dimidia.

2 ¶SINT IGITVR A B ET C D LINEAE DA*tæ, quarum maior a b, minor uerò c d ipsius maioris dimidia: inter quas operæpretium sit inuenire duas rectas sub eadem ratione continuè proportionales. Describatur itaque ex eadem a b quadratum a b c e, & ex c e latere secetur minor c d, hoc est, diuidatur c e bifariam in puncto d: & connectantur a d & a c lineæ rectæ, quarum altera, utpote a c erit ipsius quadrati diameter, reliqua uerò a d eius rectanguli diameter, quod sub eadem maiore & illius dimidia c d continetur. Ab ipso postmodum a c dimetiente, ipsi a b maiori secetur æqualis a f: ipsi autem f c æqualis a g, per tertiam primi elementorum. Per punctum deinde g ipsi a b parallela ducatur g h k, quæ secet a d rectam in puncto h: & connectatur recta a k. Consequenter, per punctum h ipsi a e parallela ducatur h l: ipsi uerò a k, itidem parallela h m, per 31 primi elementorum. Per punctum insuper m, ipsi g k parallela ducatur m n o, quæ secet præfatam*

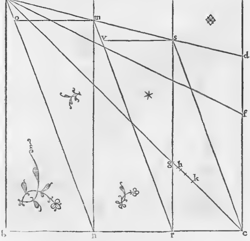
rectam a d in ipso puncto n. Et per ipsum punctum n, eidem a e parallela ducatur n p: ipsi uerò h m, parallela itidē agatur n c. Coincidet enim huiuscemodi parallela (dummodo constructionem ipsam fideliter adimpleueris) in punctum c: ut in supradictis omnibus uisum est accidisse descriptionibus: eritque recta h k secunda, n m uerò tertia proportionalis inter a b & c d lineas datas. Quod non aliter ostendetur, quàm de praecedentium trium propositionum constructionibus demonstratum extitit.



¶ Secunda differentia, quando linea minor dimidium ipsius maioris quouis modo superat.

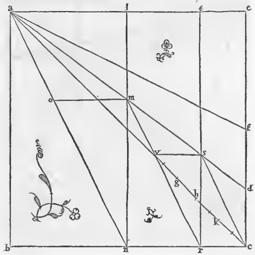
¶VBI PORRO LINEA MINOR C D, IPSIVS 3
maioris a b superauerit dimidium, etiam sub quacunque ratione id acciderit: describēdum est rursum ex eadem maiore a b quadratum a b c e, &

& ipsi minori secanda æqualis c d, & latus c e bifariam diuidendum in puncto f. & connectendæ a d, a f & a c lineæ rectæ. Secãda est postmodum ex a c dimetiente, ipsi a b æqualis a g: ipsi autem a d, æqualis a h: & ipsi a f, æqualis a k. Et differentia h k bifariam diuidenda, illiúsque dimidium auferendum ex g c: & residuæ tandem secanda æqualis a l. Quibus absolutis, ducatur per punctum l ipsi a b parallela l m n, quę secet a d rectam in puncto m: & connectatur a n linea recta. Compleãtur tandem cætera constructionis lineamenta, uti suprà dictum atque obseruatum sæpius extitit, & subscripta figura continetur. Cadet enim ultima parallelarum s c, in ipsum punctum c: eritque m n secunda proportionalis, s r uerò tertia, inter a b & c d lineas datas. Cuius demonstratio, à præallegata antecedentium constructionum demonstratione non discrepat.



¶ Tertia differentia, de lineis minoribus, quæ non faciunt ipsius maioris dimidium, sed infra dimidiam sub quacunque ratione comprehenduntur.

¶ AT SI CONTINGAT EANDEM MINOREM c d, non conficere dimidium maioris a b, etiam sub quacunque rationis differentia id acciderit: describatur rursum ex eadem maiore a b quadratum a b c e, sitque rursum data linea minor c d, & dimidia maioris c f. Connectantur postmodum a f, a d & a c lineæ rectæ: seceturque ex ipso quadrati dimetiente a c, ipsi maiori a b æqualis a g, & ipsi a f æqualis a h, atque ipsi a d æqualis a k. Sed differentia h k proportionaliter diuidenda est, & segmentum maius addendum ipsi c g: atque inde resultantis lineæ rectæ, æqualis secunda a l. Deinde absoluantur reliqua 4



qua omnia constructionis lineamenta, ut in ipsa prima differentia declaratum extitit, & obiecta uidetur indicare figura, prioribus haud dissimili. Eadem itaque resolutione demonstrationis ostendetur, rectam m n fore secundam, & s r tertiam proportionalem inter datam maiorem a b, & minorem c d: quemadmodum in supradictis omnibus constructionũ differentiis, sæpiùs fuit declaratum. De his ergo particularibus supradictarum linearum inuentionibus, hæc sint satis: ad uniuersales earundem linearum inuestigationes, transeundum esse uidetur.

PROPOSITIO V.

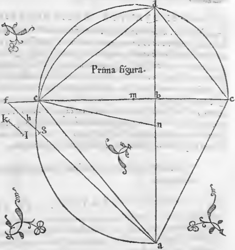
INuentionem supradictarum linearum, continuam proportionem inter datas extremas obseruantium, uniuersaliter ostendere.

1 ¶TAMETSI QVATVOR ANTECEDENTIBVS *propositionibus, huiuscemodi linearum rectarum inter datas extremas continuè proportionaliũ inuentionem multifariã expresserimus: iuuat nihilominus, easdem lineas intermedias compendiosa magis, & hactenus ignota ratione colligere: idque unica uia, & sub eodem constructionis artificio, atque tum demonstratione, tum usu admodum facili. Vt iis partim ualeamus facere satis, qui traditionum uarietate delectãtur, & compendiosas probare uidentur adinuentiones: partim etiam, ut tam utilem, hactenúsque desideratam mathematicæ partem, totis (ut aiunt) uiribus explicemus. Hanc igitur perquirendi rationem, sola 13, atque 30 sexti elementorum opitulante perstringemus: & ex corollario tantum octauæ propositionis eiusdem sexti uniuersaliter demonstrabimus.*

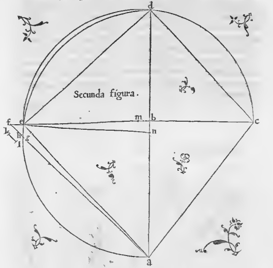
¶Constructio figuræ, omnibus linearum differentiis communis.

2 ¶SIT IGITVR (VT REM IPSAM ACV TANgamus) *datarum & inæqualium linearum maior a b, minor uerò b c, etiam sub quauis data rationis habitudine inuicem se habentes. Hæ postmodum lineæ datæ in rectum angulum qui sub a b c constituantur: & utraque ad partes b uersus d & e directè continuetur. Assumatur*

consequenter diameter quadrati, quod ex a b maiore describitur, utpote a f: & connexa a c linea recta, quæ erit diameter rectanguli sub ipsis lineis datis comprehensi, secetur illi æqualis a g. Residua autem g f proportionaliter diuidatur in puncto h, cuius segmentum maius sit f h, minus uero h g, per 30 sexti elementorum, respondensue primæ propositionis huius documentum. Et per 13 eiusdem sexti, inter f h & h g segmenta, media proportionalis inueniatur k l: cui æqualis secetur b m. Et centro m, interuallo autem m c, semicirculus describatur e d c. Diuidatur tandem a d recta bifariam in puncto n: & centro n, interuallo autem n a, uel n d, semicirculus rursum describatur a e d. Transibit enim indubitanter huius semicirculi periphæria per punctum e, ut ipsa te docebit experientia; & sequentes uidentur indicare figuræ, sub naturalibus lineis, quæ mathematicarum sunt imagines comprehensæ. Quarum prima



ma habet minorem lineam c d dimidium ipsius maioris a b, secunda uerò figura, ipso dimidio maiorem, tertia denique minorem: ut ex figurarum diuersitate, præfatæ constructionis ueritas magis elucescat.



His ita constructis, aio rectam b e fore secundam proportionalem, & b d tertiam, inter a b & b c lineas datas, sicut quidem a b ad b e, sic eadem b e ad b d, atque eadem b d ad minorem b c.

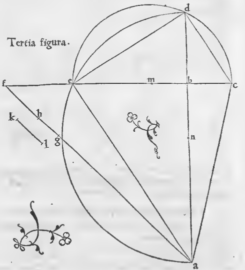
¶ Demonstratio quòd per antecedentem constructionem inuentæ lineæ rectæ, intet datas extremas continuè sint proportionales.

5 ¶QVOD AVTEM SIT VT A B AD BE, SIC *eadē b e ad b d, atque b d ad ipsam b c: sic demonstratur. Connectantur*

enim a e, e d & d c lineæ rectæ. Et quoniam angulus qui sub a e d, est in semicirculo, similiter & angulus e d c: uterque igitur rectus est, per 31 tertij elementorum. Ab ipsis autem angulis rectis a e d, e d c, in bases a d & e c, perpendiculares deducuntur e b & d b: utraque igitur perpendicularis, est media proportionalis inter segmenta suæ basis, per corollarium octauę sexti elementorum. Sicut igitur a b ad b e, sic eadem b e ad b d: atque ut ipsa b e ad eandem b d, sic eadem b d ad minorem b c. Et rursum per undecimam quinti elementorum, ut a b ad b e, sic b d ad b c. Duæ itaque lineæ rectæ b e atque b d, per ipsam constructionem adinuentę, inter a b atque b c datas extremas sub eadem ratione continuè sunt proportionales. Quod faciendum, atque demonstrandum susceperamus.

PRO-

Tertia figura.



PROPOSITIO VI.

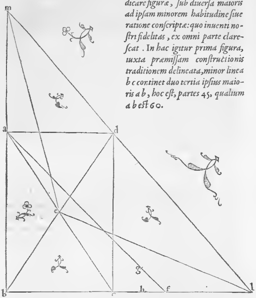
ALio rursum artificio, præmemoratas lineas rectas inter datas extremas continuè proportionales, generaliter inuestigare.

1 ¶VT GRATA ADMODVM, ET VTILI PRAEceptionum diuersitas, quibus duæ lineæ mediæ inter datas extremas continuam proportionem obseruantes eliciuntur, clariùs innotescat: operæpretium duximus, earundem linearum intermediarum inuentionem, alia construendi atque demonstrandi ratione subiungere, etiam data quauis maioris ad minorem habitudine. Huius itaque inuenti traditionem, ex geometricorum elementorum rudimentis inaudita facilitate perstringemus: ab ipsa constructione fœliciter exordiendo.

¶Præceptum generale constructionis.

2 ¶SIT IGITVR DATARVM ET INAEQVAliū linearū maior a b, minor autem b c, sub quacunque rationis habitudine sese inuicem habentes, & ad rectum angulum qui sub a b c constitutæ. & compleatur de more rectangulum parallelogrammum a b c d, sub eisdem lineis datis comprehensum. Ipsius deinde parallelogrammi rectanguli dimetientes subtendantur a c & b d, in puncto sese inuicem bifariam dirimentes. Vtraque postmodum a b atque b c, in continuum & directum quantumlibet producatur, ad partes quidem a & c: & ipsi a b maiori, æqualis secetur b f, per 3 primi elementorum. Connexa deinde a f, dimetiente uidelicet quadrati quod ex ipsa a b maiore describitur, ipsi b d uel a c dimetienti æqualis secetur a g: & residuæ g f (quæ est excessus, siue differentia dimetientis a f, super ipsum dimentem a c) æqualis secetur c h: ipsi porrò b c, æqualis itidem secetur h l. Connectatur insuper recta l d: quæ directè producta ad partes d conueniat tandem cum a b itidem producta in puncto m. Connectantur demum e l & e m lineæ rectæ, quæ de necessitate (ut ipsa te docebit experientia) æquales erunt ad inuicem. Quòd si priùs connexa fuerit e l, & illi æqualis subtensa e m: si connectatur l m, eadem uersa uice transiet per punctum d, & proinde constructio permanebit eadem.

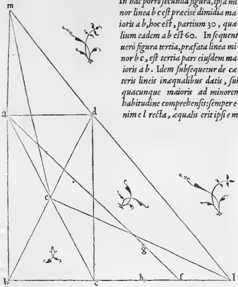
Vt ipsæ quæ sequuntur, uidētur indicare figuræ, sub diuersa maioris ad ipsam minorem habitudine siue ratione conscriptæ: quo inuenti nostri fidelitas, ex omni parte clarescat. In hac igitur prima figura, iuxta præmissam constructionis traditionem delineata, minor linea b c continet duo tertia ipsius maioris a b, hoc est, partes 45, qualium a b est 60.



His in hunc modum constructis, aio lineam rectam c l fore secundam, m a uerò tertiam proportionalem inter a b atque b c lineas datas: sicut uidelicet a b maior ad ipsam lineam c l, sic eadem c l ad ipsam m a, atque eadem m a ad minorem b c. Cadit igitur tam secunda quàm tertia proportionalis, extra rectangulum sub datis rectis comprehensum.

¶ Demonstratio, quod præfatæ lineæ rectæ per antecedentem constructionem adinuentæ, continuam inter datas extremas proportionem obseruent.

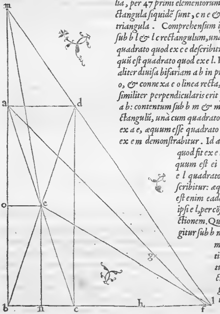
In hac



In hac porrò secunda figura, ipsa minor linea b c est præcise dimidia maioris a b, hoc est, partium 30, qualium eadem a b est 60. In sequenti uerò figura tertia, præfata linea minor b c, est tertia pars eiusdem maioris a b. Idem subsequetur de cæteris lineis inæqualibus datis, sub quacunque maioris ad minorem habitudine comprehensis: semper enim e l recta, æqualis erit ipsi e m.

3 ¶QVOD AVTEM RECTA C L SIT SECVNda, *& m a tertia proportionalis inter a b & b c lineas datas: in hunc qui sequitur modum demonstratur.* Exponatur igitur in aliarum exemplum, *sequens figura tertia: cuius latus b c bifariam diuidatur in puncto n, & connectatur recta e n, quæ perpendicularis erit super idẽ latus b c. Cùm enim b n ipsi n c per constructionem sit æqualis, & utrique communis e n, basis quoque b e æqualis ipsi e c: erit angulus e n b æqualis angulo e n c, per octauam primi elementorum, & ipsa proinde e n super eadem b c perpendicularis, per decimam diffinitionem eiusdem*

primi. Et quoniam recta b c bifariam secta est in puncto n, cui in directum apposita est recta c l: quod igitur sub b l & l c continetur rectangulum, unà cum quadrato quod ex c n, æquum est quadrato quod fit ex n l, per sextam secundi elementorum. Addatur utrisque æqualium commune, quadratum quod fit ex n e: Quod igitur sub eisdem b l & l c continetur rectangulum, unà cum quadratis, quæ fiunt ex c n & n e, æquum est iis quæ ex l n & n e describuntur quadratis. Ipsis porrò quadratis quæ ex c n & n e, æquum est quadratum quod ex c e, & quadrata similiter quæ ex l n & n e, descripto ex e l quadrato itidem æqualia, per 47 primi elementorum: rectangula siquidē sunt, c n e & e n l triangula. Comprehensum igitur sub b l & l c rectangulum, unà cum quadrato quod ex c e describitur, æquū est quadrato quod ex e l. Haud aliter diuisa bifariam a b in puncto o, & connexa e o linea recta, quæ similiter perpendicularis erit super a b: contentum sub b m & m a rectangulū, unà cum quadrato quod ex a e, æquum esse quadrato quod ex e m demonstrabitur. Id autem quod fit ex e m, æquum est ei quod e l quadrato describitur: æqualis est enim eadē e m ipsi e l, per cōstructionem. Quod igitur sub b m & m a cō tine - tur re ctan- gulū unà



cum

cum quadrato quod ex a e, æquum est comprehenſo ſub b l & l c rectãgulo, & ei quod ex c e fit quadrato: quæ enim æqualibus ſunt æqualia, & adinuicem ſunt æqualia. Quod autem ex a e fit quadratum, æquum eſt ei quod ex e c: ſunt enim a e & e c, adinuicem æquales. Detractis igitur quæ ex a e & c c fiunt quadratis: reliquum ſub b m & m a comprehenſum rectangulum, reliquo ſub b l & l c contento rectangulo erit æquale: ſi enim ab æqualibus auferantur æqualia, quę relinquuntur ſunt æqualia adinuicem. Aequalium porrò, & unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum (ſunt enim rectangula omnia parallelogramma, atque inuicem ęquiangula) latera quę circum ęquales angulos ſunt reciprocè proportionalia, per 14 ſexti elementorum. Sicut igitur b m ad b l, ſic c l ad m a. Vt autem b m ad b l, ſic m a ad ipſam a d, atque d c ad c l, per quartam ipſius ſexti elementorum: triangula enim m b l, m a d, d c l, per ipſam conſtructionem, & 29 primi elementorum, ſunt inuicem æquiangula. Quę autem eidem rationi ſunt eędem rationes, & adinuicem ſunt eędem, per undecimam quinti eorundem elemẽtorum. Sicut igitur d c ad c l, ſic eadem c l ad m a atque eadem m a ad ipſam c d. Atqui d c ipſi a b eſt ęqualis, ſimiliter & a d ipſi b c, per 34 primi elementorum: & æquales ad eandem, eandem habent rationem, & eadem ad æquales, per ſeptimam quinti ipſorum elementorum. Eſt igitur ut a b maior ad c l, ſic eadem c l ad ipſam m a, atque eadem m a ad minorem b c. Duæ itaque lineæ rectæ c l & m a, inter a b & b c datas extremas, ſub eadem ratione proportionantur. Quod demonſtrare fuerat operæpretium.

PROPOSITIO VII.

EAſdem iterum geminas rectas cum datis extremis continuè proportionales, etiam quæcunque inter illas acciderit habitudo, alia ratione perquirere.

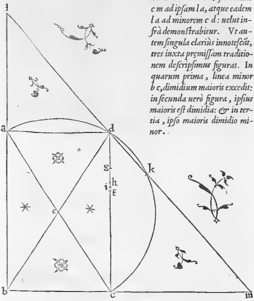
1 ¶ CVM IPSA DVARVM INTERMEDIARVM *rectarum, cum datis extremis continuam proportionem obſeruantium adinuentio, à tot tantiſque uiris, potiſsimum Græcis, támque diuerſis cogitationibus fuerit dudum perquiſita, & hactenus nihilominus*

incerta : nemo ibit inficias, si aliam superaddamus uiam uniuersalem, qua præfatæ lineæ proportionales illico fient manifestæ, etiam ignota maioris ad minorem habitudine. Tum in primis, ut ipsius artis mathematicæ, atque diuinæ illius proportionis declaremus amplitudinem: tum etiam, ut iis conemur facere satis, qui nostris inuentis & laboribus, atque eiuscemodi rerum ubertate delectantur.

¶ Constructio generalis ipsius inuenti propositi.

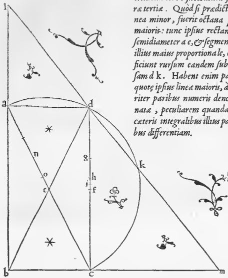
¶ VT IGITVR AD REM IPSAM DEVENIAmus, *sint rursum a b & b c lineæ datæ, & a b ipsa b c sub quauis data ratione maior: inter quas operæpretium sit, duas medias inuenire rectas, sub eadem ratione continuè proportionales. Describatur igitur rectangulum a b c d, sub ipsis datis lineis comprehensum, cuius dimetientes sint a c & b c, in puncto e sese inuicem bifariam dirimentes. Et centro e, interuallo autem e a uel e c aut e d, circulus describatur, cuius dimidium sit a d c, dimetiens uerò a c, idem uidelicet qui & ipsius a b c d rectanguli. Secetur postmodum ex c d latere (quod per 34 primi elementorum, ipsi maiori lineæ datæ a b est æquale) recta c f æqualis ipsi minori b c, per tertiam eiusdem primi elementorum. Reliqua autem f d, proportionaliter, seu media & extrema ratione diuidatur in puncto g, cuius segmentum maius sit d g, minus uerò g f, per præmissum antecedentis primæ propositionis documentum, aut sæpiùs allegatam 30 sexti prædictorum elementorum. Ipsum deinde segmentũ minus g f, proportionaliter itidẽ diuidatur in puncto h, cuius segmẽtum maius sit g h, minus uerò h f: quod rursum proportionaliter diuidatur in puncto i, cuius segmentum maius sit h i, minus autem i f. Ipsi consequenter lineæ rectæ d i, ex tribus segmentis maioribus d g, g h, h i resultanti, æqualis subtendatur, coaptetur ue d k, per primam quarti elementorum: quæ ad utrasque partes in directum continuata, conueniat tandem cum ipsis a b & b c lateribus, siue lineis datis, ad partes a & c in directum & continuum itidem productis, in punctis l & m. His in hunc modum constructis, æqualis erit l d ipsi k m: quemadmodum ocularis te docebit experientia, & ad iustam circini rationem obseruata dimensio. Erit præterea recta c m secunda, & ipsa l a tertia proportionalis, inter a b & b c lineas à principio datas: sicut uidelicet*

a b



a b maior ad c m, sic eadem c m ad ipsam l a, atque eadem l a ad minorem c d: uelut infrà demonstrabitur. Vt autem singula clariùs innotescāt, tres iuxta premissam traditionem descripsimus figuras. In quarum prima, linea minor b c, dimidium maioris excedit: in secunda uerò figura, ipsius maioris est dimidia: & in tertia, ipso maioris dimidio minor.

3 ¶ *Nec te prętereat, cùm minor b c est dimidium maioris a b, eandem subtensam d k resultare similiter ex segmento maiori semidiametri a e uel e c ipsius rectanguli a b c d, & maiori segmento ipsius segmenti minoris eiusdem semidiametri, proportionaliter seu per mediam & extremam rationem diuisi, utpote ex a o: ut ex eadem secunda licet deprehendere figura. Si autem prefata linea minor, fecerit quartam partem ipsius maioris prædicta subtensa d k, constabit similiter ex eodem semidiametro, & minori segmento proportionali eiusdem semidiame-*



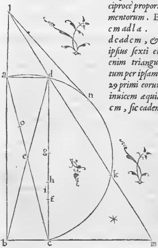
tri: uelut ex c o succedentis figuræ tertiæ. Quòd si prædicta linea minor, fuerit octaua pars maioris: tunc ipsius rectanguli semidiameter a e, & segmentum illius maius proportionale, conficiunt rursum eandem subtensam d k. Habent enim partes quotę ipsius lineæ maioris, à pariter paribus numeris denominatæ, peculiarem quandam à cæteris integralibus illius partibus differentiam.

¶Demonstratio earundem linearum proportionalium, iuxta præmissam traditionem adinuentarum.

¶QVOD AVTEM RECTA C M SIT SECVNda proportionalis, & ipsa l a tertia, inter a b & b c lineas datas: *sic demonstratur. A dato puncto l, in circunferentiam ipsius a b c d circuli, contingens linea recta ducatur l n, per 17 tertij elementorum. Cùm igitur l d recta, sit æqualis ipsi k m, per ipsam constructionem: erit consequenter l k, æqualis ipsi d m. Porrò sub æqualibus rectis æqualia continentur rectangula: quod igitur sub k l & l d continetur rectangulum, æquum est ei quod sub ipsis d m & m k rectangulo continetur.* 4

Compre-

Comprehensum autem sub k l & l d rectangulum, æquum est quadrato quod fit ex tangente l n: cui rursum quadrato, æquum est rectangulum sub ipsa b l & l a contentum, per 36 tertij elementorum. Quod igitur sub b l & l a continetur rectangulum, æquum est comprehenso sub k l & l d rectangulo: & proinde ei, quod sub d m & m k rectangulo continetur. Haud aliter eidem rectangulo, quod sub d m & m k rectis continetur, æquale demonstrabitur comprehensum sub b m & m c rectangulum: utrunque enim æquum erit quadrato a b ea linea recta descripto, quæ ducta ex puncto m eundem circulū tanget. Quod igitur sub b l & l a continetur rectangulum, comprehenso sub b m & m c rectangulo est æquale: nam utrunque æquale ei, quod sub d m & m k rectangulo cōtinetur. Omne autem rectangulum, simul est parallelogrammum: & omnes anguli recti æquales sunt adinuicem. Aequiangulorum porrò, & unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum, latera quæ circum æquales angulos sunt reciprocè proportionalia, per 14 sexti elementorum. Est igitur ut l b ad b m, sic c m ad l a. Vt autem l b ad b m, sic d c ad c m, & l a ad ipsam a d, per 4 ipsius sexti elementorum: rectangula enim triangula l b m, l a d & d c m, tum per ipsam constructionem, tum per 29 primi eorundem elementorum, sunt inuicem æquiangula. Vt igitur d c ad c m, sic eadem c m ad ipsam l a, atque eadem l a ad ipsam a d. Ipsi porrò d c æqualis est a b linea data maior, & ipsi a d æqualis minor b c, per 34 primi elementorū: & æquales ad eādem uel æquales, eandē habēt rationē, per septimā quinti elemētorū. Est igitur, ut maior datarū rectarum a b ad rectam c m, sic eadem c m ad ip-



ſam l a, atque eadem l a ad minorem b c: quod fuerat oſtendendum.

PROPOSITIO VIII.

Alium tandem conſtruendi, atque demonſtrandi eiuſcemodi lineas proportionales intermedias, ſubiungere modum, ex proximo corollarium.

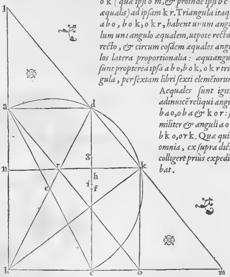
¶VT NIHIL OMITTAMVS, QVOD AD PRAE- 1
dictarum linearum inter datas extremas continuè proportionalium inueſtigationem atque oſtenſionem ſacere uideatur: adiunximus demum aliam & conſtruendi & demonſtrandi rationem, ex iis quæ proxima tradita ſunt propoſitione corollariè depromptam. In primis igitur, quæ ex ipſa propoſitione colligẽda ſunt refricabimus: poſtea eiuſdem conſtructionis atque demonſtrætionis abſolutionem perſtringemus.

¶Quæ ex proxima colligenda ſunt propoſitione.

¶RESVMATVR ITAQVE, ET OB OCVLOS 2
exponatur aliqua trium antecedentium figurarum (nam idem erit habendum iudicium de cæteris quibuſcunque ſimilibus) utpote ſecunda, in qua minor linea b c ſumpta eſt dimidia ipſius maioris a b. Et per punctum k*, ipſi b m parallela ducætur* k *n: ipſi uerò d c parællela itidem agatur* k *o. Et connectatur a o linea rectæ, quæ ſecet eandem* k *n in pũcto r: connectatúrque demum rectæ b* k*.* His *in hunc modum conſtructis, erunt triangula l a d,* k *o m inuicem æquiangula: ut ex quarto poſtulato geometrico, & 29 primi elementorum concludere haud difficile eſt.* Hinc *per quartam ſexti eorundem elementorum, erit ut d l æd ipſam l æ, ſic m* k *ad ipſam* k *o: atque ut eadem l d ad ipſam d a, ſic eadem* k *m ad ipſam m o.* Atqui *ex ipſa præcedenti conſtructione, l d &* k *m æquales ſunt adinuicem: & ad quas eadem uel æquales eandem habẽt rationem, ipſæ ſunt inuicem æquales, per nonæm quinti elementorum.* Aequalis *eſt igitur l a ipſi* k *o, & a d ipſi o m.* Eſt *autem* k *o ipſi l a parallela, ſimiliter & a d ipſi o m, poſt conſtructionem.* Recta *igitur a o utrique ipſarum l* k *& d m æqualis eſt, & parallela, per 33 primi elementorum.* Et *quoniam utraque b c & o m, ipſi a d eſt æqualis: eſt igi-*

tur

tur ipsa b c æqualis eidem o m, & tota proinde b o toti c m æqualis: & triangulum consequenter a b o, triangulo d c m æquilaterum & æquiangulum. Præostensum est autem, *ut d c ad c m, sic eadem c m ad l a, atque eadem l a ad ipsam a d.* Est igitur per septimã quinti elementorũ ut a b ad b o, sic eadẽ b o ad o k, atque eadẽ o k (quæ ipsi o m, & proinde ipsi b c est æqualis) ad ipsam k r. *Triangula itaque a b o, b o k, o k r, habent unum angulum uni angulo æqualem, utpote rectum recto, & circum eosdem æquales angulos latera proportionalia: æquiangula sunt propterea ipsa a b o, b o k, o k r triãgula, per sextam libri sexti elemẽtorum.*

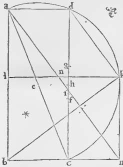


Aequales sunt igitur adinuicẽ reliqui anguli b a o, o b a & k o r: similiter & anguli a o b, b k o, o r k. Quæ quidẽ omnia, ex supra dictis colligere prius expediebat.

¶Summaria propositionis executio, cũ illius demonstratione.

3 ¶OBLATIS ITAQVE DVABVS LINEIS RE*ctis inæqualibus, a b quidem maiore, & minore b c (ut ad propositam construendi atque demonstrandi rationem deueniamus) describatur rectangulum a b c d sub eisdem lineis datis comprehensum, unà cum illius dimetiente a c bifariam diuiso in puncto e. Et centro e, interuallo*

autem e a uel e c, ſemicirculus deſcribatur a d c. Eliciatur poſtmodum, & ſubtendatur recta d k, ueluti proxima traditum eſt propoſitione: ſecta uidelicet ex c d (quæ ipſi maiori a b eſt æqualis) minori b c æquali, quæ ſit c f, & reſidua f d in quatuor ſegmenta proportionalia diſtributo, in ipſis quidem punctis g h i, minoribus ſegmentis in punctum f terminatis: quorum ſegmentorum tria maiora d g, g h, h i, conficiant ipſam d k ſubtendendam. Deinde per punctum k, ipſi b c parallela ducatur k l: ipſi autem a b ſiue d c, parallela k m quam attingat b c in directum producta uerſus m, in ipſo puncto m. Tandem, connectatur b k & a m lineæ rectæ, ſecétque eadem a m ipſam k l in puncto n ut in obiecta continetur figura, in qua minor linea b c non facit dimidium maioris a b, ſed quartam illius partem ſuperat.



¶HIS ITA CON- 4
ſtructis, manifeſtum eſt ex præmiſſa deductione, triangula a b m, b m k, m k n, eſſe inuicem æquiangula: & proinde a b rectam ſe habere ad b m, ut eadem b m ad m k, atque eadem m k ad ipſam k n, quæ eſt æqualis ipſi minori b c: parallelogrammum ſiquidem eſt a d k n quadrilaterum, & proinde utraque b c & k n ipſi a d eſt æqualis, & altera pendenter æqualis alteri. Recta itaq; linea b m eſt ſecunda proportionalis, & m k tertia, inter maiorem a b, & minorem b c lineas à principio datas. Haud alienũ uelim habeas iudicium, de ſimilibus quibuſcunque figuris, atque lineis inæqualibus datis. His itaque finem imponẽtes, è lineis proportionalibus, ad ipſos numeros noſtrum iuuat conuertere ſermonem.

PROPOSITIO IX.

DVobus numeris inæqualibus datis, duos medios numeros, ſub eadem ratione continuè proportionales, pendenter ſupputare.

¶PRAESTAT CONSEQVENTER IDEM IN NVmeris, *quod & in ipsis absoluere lineis rectis: tum ut fidem eorum faciamus, quæ de præfatis lineis rectis partim tradita, partim uerò in sequentibus libris tradenda sunt: tum etiam ut eorum quæ sequuntur demonstrationes (cùm nobis uisum fuerit operæpretium) familiariter elucidemus.*

¶ De ui, atque potestate numerorum.

1 ¶ *Nulla siquidem fidelior uidetur esse uia perueniendi ad incommensurabilium magnitudinum latentes habitudines, quàm proximarum & commensurabilium magnitudinum, & ipsorum proinde numerorum auxilio. Quoniam numerus nihil aliud esse uidetur quàm mensurarum siue partium commensurabilium magnitudinum determinata multitudo. Et commensurabiles magnitudines adinuicem rationem habent, quam numerus ad numerum, per quintam decimi elementorum. Quanquam enim irrationales, incommensurabilésue magnitudines, numeris ad unguem exprimere sit impossibile: fieri tamen non facilè potest, quin numeri sub adeò proximam coincidentes rationem, fidem apertam faciant easdem magnitudines non aliter sese inuicem habere, quàm iidem polliceantur uel ostendant numeri: tanta est inter continua atque discreta, hoc est, inter ipsas magnitudines in diuisibilia semper diuisibiles, atque numeros in infinitum progredientes amicitia siue concordia. Quod igitur de lineis rectis, proximis tradidimus propositionibus: hic de numeris, ad numerósue relatis magnitudinibus, pendenter eo docere, congruum nobis uisum fuit, atque non incommodum. Oblatis porrò duobus inæqualibus numeris, duo medij numeri sub eadem ratione continuè proportionales, non usque adeò præcisa ratione colligentur, qua & ipsæ lineæ rectæ. Quamuis enim ars numerorum sit omnium clarissima, in multis tamen à doctrina continuorum superari uidetur: ob scilicet numerorum non quadratorum, aut minimè cuborum radices (quibus frequenter uti cogimur) quæ sunt surdæ, & numeris ad amussim exprimi non possunt. Satis erit tamen, quantum ad rem nostram spectare uidetur (ubi non quadrati, aut minimè cubi producentur supputando numeri) si eius-*

cemodi numeros intermedios, cum datis extremis continuè proportionales, aut alios quosuis similes ueritati admodum propinquos, quantum uidelicet ars ipsa patitur numerorum, supputare docuerimus.

¶ Regula propositionis executiua.

¶ EX IRRATIONALIVM ITAQVE *magnitudinum praxi, quæ paucis admodum uidetur esse nota: hanc generalem & ueluti corollariam tibi collegimus, & tandem conscripsimus regulam, ipsius propositionis executiuam. Propositis itaque duobus inæqualibus numeris, inter quos oporteat duos inuenire numeros, sub eadem ratione continuè proportionales: secundus in primis eorundem proportionalium numerorum, hoc artificio colligendus est. Multiplicentur ipsi dati numeri adinuicem, hoc est, alter datorum extremorum ducatur in reliquum: & productus inde numerus, per ipsum primum iterum multiplicetur. Vel (& idem obtinebis) ipse numerus primus ducatur in seipsum: & procreatus inde numerus, multiplicetur per reliquum extremum. Consurgentis demum alterutro duorum modorum numeri, cubica radix extrahatur: nam ipsa radix, erit optatus numerus proportionalis, ordine secundus. Hanc dissimiliter, si numerus ex eorundem extremorum multiplicatione resultans, ducatur in eum qui futurus est quartus, uel idem numerus quartus per seipsum multiplicetur, & productus inde numerus ducatur in ipsum primum, atque resultantis alterutro modo numeri cubica radix supputetur: ea erit tertius proportionalis numerus. Poterit & idem numerus tertius, obtento (ueluti nunc expressimus) secundo numero, aliter obtineri: ducendo uidelicet eundem secundum numerum in quartum, & prosilientis inde numeri quadratam extrahendo radicem. ipsa namque radix, eundẽ tertium exprimet numerum. Si tres enim numeri, continuè fuerint proportionales: qui sub extremis, æqualis est ei qui à medio fit numero, per uigesimam septimi elementorum. Verùm ubi supradicto modo procreati numeri non fuerint aut quadrati, aut cubi, & surdas (ut uocant) habuerint radices: habebis saltem, quorum numerorũ ipsi medij ꝑportionales sunt*

sunt radices. Qui si in usum ueniant reuocandi: sumendæ tunc erũt radices cubicæ, uel quadratæ, ad ueras & surdas radices quàm maximè fieri poterit accedentes. quemadmodum septimo & octauo capitibus libri primi Arithmeticæ nostræ practicæ tradidimus.

¶ Supradictæ supputationis exempla.

3 ¶ *Proponantur in regulæ confirmationem, hi duo numeri 32, 4, inter quos oporteat duos medios inuenire numeros, sub eadem ratione continuè proportionales. Duc igitur 32, in 4, fient 128: quæ rursum per 32 multiplicata, reddunt 4096. Aut (si libuerit) duc 32 in sese, producentur 1024: hæc rursum multiplicata per 4, restituunt eadem 4096. quorũ radix cubica, est 16: tantus est igitur numerus secundus proportionalis optatus. Quòd si multiplicaueris eundem numerum 128, ex ductu 32 in 4 procreatum, per ipsa 4, producentur 512: aut 4 in sese, fient 16, & hæc in 32, consurgent eadem 512. quorum radix cubica est 8: tantus est igitur ipse tertius & proportionalis numerus. Ipsi nanque numeri 32, 16, 8, 4, sub ratione dupla continuè proportionantur. Eundem quoque numerũ tertium obtinebis, si multiplicaueris 16 per 4, fient enim 64: quorum radix quadrata est 8, idem uidelicet qui priùs inuentus est numerus.*

Sint rursum oblati numeri 36, & 10 $\frac{2}{3}$, inter quos reperiendi sint duo numeri, continuam cum ipsis extremis proportionem obseruantes. Multiplicabis ergo 36, per 10 & $\frac{2}{3}$, producentur 384: quæ rursum ducta in 36, conficiunt 13824. Vel ducito 36, in sese, fient 1296: & hæc rursum in 10 & $\frac{2}{3}$, restituentur eadem 13824. Quorum radix cubica, est 24: tantus est igitur secundus numerus proportionalis. Porrò si eundem numerum 384, ex ductu 36 in 10 & $\frac{2}{3}$ procreatũ, per ipsa 10 & $\frac{2}{3}$ multiplicaueris: uel eadem 10 & $\frac{2}{3}$ duxeris in sese, & productũ numerum (scilicet 113 $\frac{7}{9}$) multiplicaueris per ipsum numerum 36: resultabunt utroque modo 4996. Quorum radix cubica est 16: tantus est ipse tertius & proportionalis numerus. Quoniã ipsi numeri 36, 24, 16, 10 $\frac{2}{3}$, sub ratione sesqualtera cõtinuè proportionãtur. Eundẽ præterea numerũ tertiũ impetrabis, si multiplicaueris 24 per 10 & $\frac{2}{3}$: producẽtur enim

256. *Quorũ radix quadrata, eſt 16, idẽ qui prius collectus eſt numerus.*

¶ Corollarium primum, de duobus nnmeris proportionalibus, inter datum numerum & unitatem.

¶ SI IGITVR INTER DATVM NVME- 4
rum & unitatem, duo medij proportionales occurrãt numeri: minor ipſorũ intermediorũ, erit cubica radix ipſius numeri dati, & quadrata radix reliqui numeri intermedij. Si enim ab unitate, quatuor numeri fuerint inuicẽ proportionales: tertius ab ipſa unitate quadratus erit, quartus uerò cubus, per octauam noni elementorum. Quoties igitur ſecũdus ab unitate numerus, eandem continet unitatem: toties numerus tertius eundem ſecundum, & quartus ipſum tertium comprehendit numerum. Ex ductu itaque ſecundi numeri ab unitate in ſeipſum, ſit tertius: & ex ductu ipſius tertij in eundem ſecundum, quartus reſultat numerus. Per ipſius ergo quadratæ, atq; cubica radicis diffinitionẽ: præfatus numerus ſecũdus eſt radix quadrata tertij, & ſimul cubica radix ipſius quarti numeri. Quemadmodum ex ſubiectis numerorum colligitur formulis.

Numeri dupli.	*Tripli.*	*Quadrupli.*	*Quintupli.*
1. 2. 4. 8.	1. 3. 9. 27.	1. 4. 16. 64.	1. 5. 25. 125.

¶ Corollarium ſecundum, quòd primo 4 proportionalium numerorũ exiſtente cubo, oportet quartũ eſſe cubũ.

¶ *Hinc rurſum ſequitur, datis quatuor numeris continuè proportionalibus: ſi alter extremorum fuerit cubus, reliquus extremus itidem erit cubus. Nam ſi duorum numerorum, duo medij proportionales fuerint* 5
numeri: ipſi extremi numeri ſolidi erunt, atque inuicem ſimiles, per 21 octaui elementorum. Si igitur inter quatuor numeros cõtinuè proportionales, unus extremorum fuerit cubus: reliquus extremus itidem cubus erit. Vt ex ſubſcriptis numerorum clareſcit formulis.

Numeri dupli.	*Tripli.*	*Quadrupli.*	*Quintupli.*
8. 16. 32. 64.	8 24. 72. 216.	8. 32. 128. 512.	8. 40. 200. 1000.

¶ Incidens notandum, de duorum proportionalium numerorum inter duos cubos inuentione peculiari.

9 ¶ *Poterunt autem & ipſi duo medij numeri, inter duos oblatos cubos continuè proportionales, alia ratione in hunc qui ſequitur modum ſupputari. Duc radicem cubicam unius, in cubicam alterius radicem, & inde productum numerum duc tandẽ in radicẽ maioris numeri cubi: fiet enim maior numerus proportionalũ intermedius. Quòd ſi eundem productum numerum, ex mutua radicum multiplicatione procreatum, multiplicaueris per radicem numeri cubi minoris: conſurget eorũdem intermediorum & proportionalium numerorum minor. Eoſdem quoq; numeros intermedios rurſum obtinebis, ſi utriuſque dati cubi radicem cubicam in ſeipſam duxeris, & quadratũ unius radicis numerũ, per alterius radicẽ alternatim multiplicaueris. Quadratus enim maioris radicis numerus, per minorem radicẽ multiplicatus. dabit maiorem: quadratus uerò minoris in ipſam maiorem radicem uerſa uice ductus, ipſum minorem prædictorum intermediorum reſtituet numerum. Quemadmodum ſubſcripta demonſtrare uidentur exempla. Id autem non in rationalibus tantummodo numeris: ſed & in ſurdis, hoc eſt, irrationales habentibus radices, indifferenter obſeruandum eſſe uelim non ignores.*

Exemplum iuxta primum modum.	*Exemplum ſecundi modi.*
Cubus 8. 16. 32. 64. *Cubus*	*Cubus.* 8. 16. 32. 64. *Cubus.*
℞ *cubi* 2 < 8 > 4 ℞ *cubi*	℞ *cubi.* 2. — 4 ℞ *cubi.*
	Quadratus radicis 4. — 16 *Quadrat⁹ radicis.*
productus radicum.	

¶Corollarium tertium, de ſucceſſione quatuor numerorum continuè proportionalium.

7 ¶ *Sequitur conſequenter, inter unitatem & primum octonariũ numerum ſcilicet 8, atque inter binarium & 16 octonarium ſecundum, inter ipſum quoq; ternariũ & octonarium tertiũ ſcilicet 24, & cõſequenter inter quaternariũ & ſuccedentẽ octonariũ quartũ, utpote 32, & deinceps in hũc modũ obſeruato extremorũ ordine: duos rationales occurrere numeros, ſub eadẽ ratione (nempe dupla) continuè proportionales. Vt obiecta tabella demonſtrat. Porrò inter ipſam unitatem, & numeros primum octonarium antecedentes, atque inter binarium & ſeptem numeros*

1	2	4	8
2	4	8	16
3	6	12	24
4	8	16	32
5	10	20	40
6	12	24	48
7	14	28	56
8	16	32	64

præcedẽtes 16, necnõ inter ipsum ternariũ & septem numeros præcedẽtes 24, & deinceps in hunc modum facta comparatione: duos itidem coincidere numeros continuè proportionales, sed surdos, utpote, non cubicorum numerorum radices, quæ irrationales & surdæ nuncupantur.

¶ Corollarium quartũ, de solidis extremos quatuor proportionalium admittentibus numeros.

¶ *Tandem colligitur, solidum numerum rectangulum, cuius basis est* 8
quadratus primi quatuor proportionalium numerorũ continuè proportionalium, altitudo uerò quartus: æquari cubo ipsius secundi numeri. Haud dissimiliter elicitur, solidum & rectangulum numerũ, cuius basis est quadratus numeri quarti eorundem quatuor proportionalium, altitudo uerò ipse numerus primus: æquari cubo ipsius tertij numeri. Quẽadmodum ipse numerorum calculus te docebit.

¶ Exempla.

Exponantur ergo hi numeri 3, 6, 12, 24, sub ratione dupla continuè proportionati. Quadratus igitur primi numeri, est 9: per quem si multiplicaueris 24, fient 216. Tantus est igitur solidus numerus rectangulus, cuius basis est quadratus numeri primi, altitudo uerò quartus proportionalis numerus. Huic æquatur cubus secundi numeri, qui est 6: nam sexies 6, efficiunt 36, & rursum sexies 36, conficiunt 216. Fiat autem quadratus ex numero 24, is erit 576: quẽ si per 3 multiplicaueris, prodibit solidus numerus rectangulus 1728, cuius basis est quadratus numeri quarti, altitudo uerò primus proportionalis numerus. Huic rursum æqualis est cubus numeri tertij, ipsius uidelicet numeri 12: quoniã duodecies 12 faciunt 144, & rursum duodecies 144, restituunt 1728.

¶ PROPOSITIO X.

QVAE ex ipsis quatuor numeris continuè proportionalibus suboriantur proportiones, paucis colligere.

¶ EX PRAEDICTIS AVTEM QVATVOR NVMERIS, *sub eadem ratione continuè proportionalibus, sequentes deducuntur*

sub-

ſubinferunturue numerorum proportiones: quarum adminiculo, una regula ex ipſa quatuor numerorũ proportionalium harmonia data, multæ & admodum utiles regulæ pendenter elici poſſunt.

De quatuor proportionalium numerorum differentiis.

1 ¶ *In primis ipſorum quatuor numerorum continuè proportionaliũ differentiæ: itidem ſub eadem ratione continuè ſunt proportionales.* Reſumantur enim hi quatuor numeri 32, 16, 8, 4, *ſub ratione dupla cõtinuè proportionales.* Clarum eſt ipſorum numerorum differentias, eſſe 16, 8, 4: *quæ ſub ratione dupla, quemadmodum & ipſi dati numeri, continuè proportionantur.*

¶ De ipſorum quatuor proportionalium æquè multiplicibus, aut ſubmultiplicibus.

2 ¶ *Datis inſuper quatuor numeris continuè proportionalibus: illorum æquè multiplices aut ſubmultiplices numeri, continuè itidem erunt proportionales.* Nam *ſi prædictorum numerorum continuè proportionalium* 32, 16, 8, 4, *triplos (uerbi gratia) acceperis numeros, utpote,* 96, 48, 24: 12, *offendes illos in eadẽ ratione, qua & ipſos numeros datos, continuè itidem proportionari.* Aut *ſi eorundem numerorum* 32, 16, 8, 4, *ſubduplos ſiue dimidios ſumpſeris numeros: utpote,* 16, 8, 4, 2: *hi erunt ſub ratione dupla, quemadmodum & ipſi dati numeri continuè proportionati.* Partes enim, & *æquè multiplicia, eandem rationem habent ſumpta adinuicem, per* 15 *quinti elementorum.*

¶ Alia proportionis illatio notanda.

3 ¶ *Eiſdem præterea quatuor numeris proportionalibus datis, ſi ex ipſis quatuor adgregatus numerus, per quemlibet eorundem numerorum ordine diuidatur: quoti ex diuiſionibus ſingulatim procreati numeri, erunt pariter continuè proportionales.* Repetãtur enim præaſſumpti numeri 32, 16, 8, 4, *qui ſimul iuncti conficiunt* 60. Si diuidantur ergo 60, *in primis per* 4, *deinde per* 8, *poſtmodum per* 16, *tandem per* 32: *procreabuntur hi numeri* 15, $7\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, $1\frac{7}{8}$, *ſub eadẽ ratione qua & ipſi dati numeri continuè proportionales.*

¶ De permutata ſupradictorum numerorum proportione.

4 ¶ *Præter ſupradictas, alias etiam quamplurimas, ex eiſdem quatuor numeris proportionalibus, licebit elicere proportiones: tum maximè, ex ſedecima quinti elementorum permutatim arguendo.*

Eandem nanque rationem habent (ut priùs aſſumptis utamur numeris) 32, ad 8, quam 16, ad 4: nempe quadruplam. Idem habendum eſt iudicium, de datis quibuſcunque numeris ſub continua aut diſcontinua proportione colligatis.

¶ De eorundem numerorum proportione, quæ compoſita, atque diuiſa nuncupatur.

¶ *Oblatis rurſum præfatis numeris continuè proportionalibus 32, 16, 8, 4, ſi componantur 32, & 16, fient 49: numeri autem 8, & 4, ſimul iuncti efficiunt 12. Eandem itaque rationem habent 48, ad 16, quam 12, ad 4: utrobique enim tripla ratio comperitur. Quapropter à diuiſis ad compoſitos numeros facta relatione, proportio ſuboritur: tametſi ab alio denominata numero. Haud diſsimiliter proportionem inferre licebit, à compoſitis ad diuiſos arguendo numeros: quemadmodum ex præaſſumptis numeris, uel facilè colligitur. Hæc autem ex 17 & 18 quinti elementorum fiunt manifeſta.* 5

¶ Conditio quatuor proportionalium numerorum ualde notanda.

¶ *Nec prætermittenda eſt eorundem quatuor proportionalium numerorum ex decimanona ſeptimi elementorum deprompta conditio: ut ſcilicet tantus ſub extremis, quantus ſub intermediis inuicem multiplicatis, producatur numerus. Quemadmodum ex ſupradictis 4 numeris 32, 16, 8, 4, uel facilè colligitur. Siue enim multiplicentur 32 per 4, aut 16 per 8: idem naſcetur numerus, utpote 128. Haud alienum uelim habeas iudicium, de cæteris numeris datis continuè uel diſcontinuè proportionalibus.* 6

LIBRI PRIMI FINIS.

RERVM MATHEMATICARVM HACTENVS DESIDERATARVM LIBER SECVNDVS.

¶PROPOSITIO I.

QVAM rarionem habe ar circunferentia circuli ad diamerrum, consequẽter inuestigare: rectámque lineam eidem circunferentiæ æqualem, ex ipso colligere diametro.

1 ¶ABSOLVTA LIBRO PRIMO DVARVM RE*ctarum, inter datas extremas continuè proportionalium, inuentione diuersa, atque simul ostenso, qualiter inter duos oblatos numeros inæquales, duo medij numeri continuè itidem proportionales colligantur: Consentaneum esse uidetur, ut hoc libro secundo, rationem quam habet circunferentia ad circuli diametrum ostendamus, saltem quantum fieri poterit uero proximam ipsiue circunferentiæ uel datæ eius parti, rectam æqualem assignemus, & è conuerso. Deinde circulum ipsum metiri, & tandem in quadratum æquale, datúmue quadratũ in æqualẽ circulũ, pluribus modis reuocare doceamus. Hæc enim sunt, quæ unà cum præfatis lineis proportionalibus, in re mathematica potissimũ desiderari uidebãtur: utpote, à quibus cętera omnia, quę duobus sequentibus libris (Deo fauente) trademus, pendere fit manifestum.*

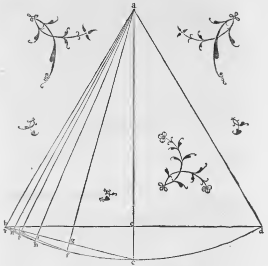
¶Constructio figuræ generalis.

2 ¶SIT IGITVR SEXTA PARS CIRCVLI *a b c d, sub æquilatero & æquiangulo triangulo a b d, & sectione b c d, comprehensa. Ipsum enim triangulũ æquilaterum a b d, est sexta pars hexagoni regularis in dato circulo descripti: cuius unumquodque latus, æquum est eiusdem circuli semidiametro, per corrolarium* 15 *quarti elementorum. Diuidatur itaque arcus b c d, bifariam, in ipso quidem puncto c, per* 30 *tertij eorundem elementorum: & connectatur semidiameter a c, qui secet ipsam b d, rectam in puncto e. Secabit igitur a c, eandem rectam b d, bifariam, atque ad*

rectos angulos. Cùm enim arcus b c, arcui c d, sit æqualis, per ipsam constructionem: æqualis est propterea angulus b a c, angulo c a d, per 27 ipsius tertij elementorum. Et quoniam a b, ipsi a d, est æqualis, & utrique communis a e: æqualis est basis b e, trianguli b a e, ipsi basi e d, trianguli e a d, per quartam primi elementorum: & angulus consequenter a e b, æqualis angulo a e d, & proinde uterque rectus. Secat igitur a c, recta, eandem b d, rectam bifariam, & ad rectos angulos, in ipso puncto e. Diuidatur consequenter arcus b c, bifariam in puncto f: & connectantur a f, & b c, lineæ rectæ. Secabit itaque a f recta, ipsam b c rectam, bifariam, & ad rectos angulos: sit illarum communis intersectio, punctum g. Arcus deinde b f, diuidatur bifariam in puncto h: & connectantur a h, atque b f, lineæ rectæ. Ipsa igitur a h, bifariam secabit eandem b f, atque ad rectos simul angulos: secent sese igitur adinuicem in puncto i. Haud dissimiliter arcus b h, diuidatur bifariam in puncto l, per ipsam 30 tertij elementorum: & cōnectantur a l, & b h, lineæ rectæ, sese inuicem intersecantes in puncto m. Diuidatur tandem arcus b l, bifariam, in puncto n: & connectatur a n, linea recta, quæ secet rectā b l, in puncto o. Secabit ergo a l, ipsam b h, bifariam, & ad rectos angulos in ipso puncto m: & a n, ipsam b l, in eodem pūcto o: quemadmodum de rectis a c, atque b d, fuit demonstratum. Postremò, per datum punctum n, ipsi b l, parallela ducatur p n r, per 31 primi elementorum: quæ unà cum a b, & a l, directè productis, conueniat in ipsa puncta p & r.

¶ Summaria constructorum recollectio.

¶ His constructis, clarum est in primis omnia triangula, ad uertices e, g, i, m, o, consistentia, fore rectangula. Rectam insuper b d, subtendere sextam circunferentiæ partem: b c uerò, duodecimam: & b f, uigesimāquartam: ipsam deinde b h, quadragesimāoctauam: atque b l, eiusdem circunferentiæ partem nonagesimamsextam. Et proinde ipsam b l, rectam, esse latus polygoni æquilateri & æquianguli, in dato circulo (cuius centrum est a) descripti, habentis latera 96: ipsam uerò p r lineam rectam, esse latus polygoni æquilateri, & æquianguli, laterum similiter 96, circa eundem circulum descripti. 3



¶Quòd ratio circunferentiæ, ad ipsius circuli diametrum, est maior tripla decupartiente septuagesimas primas.

¶AIO ITAQVE PRIMVM, AMBITVM SI-
4 *ue circunferentiam propositi circuli, cuius centrum est a, ad ipsius circuli diametrum rationem habere, tripla decupartiente septuagesimas primas utcunque maiorem. Sit enim ab, uel ac, semidiameter partium 60, qualium uidelicet totus diameter est*

partium 120 : quarum partium quælibet in minuta ſexagenaria ſolito more diſtributa ſubintelligatur. Cùm igitur a b , ipſi b d , ſit æqualis : qualium igitur partium a b . eſt 60 , talium ipſa b e, eſt 30. Quadratum porrò ipſorum 60 , eſt 3600 : eorundem uerò 30 quadratum , eſt ſimilium partium 900. Subtractis autem 900 , ex ipſis 3600, relinquuntur 2700 : totidem ergo partium eſt quadratũ ipſius a e, per 47 primi elementorum, cuius radix, hoc eſt ipſa a e, habet partes 51,& minuta 57,41,29,14 . Quòd ſi eadem a e, tollatur ex a c, quæ eſt partium 60, relinquetur e c, partium quidem 8,& minutorum 2,18, 30,46: quorum quadratum, habet partes 64,& minuta 37,1,32,1,47, 22,35,16. Hoc autem quadratum, iunctum quadrato ipſius b e, conficit quadratum ipſius b c, partium quidem 964, & minutorum 37,1,32,1, 47,22,35,16: cuius quadrati radix, habet partes 31 , & minuta 3, 29, 49,38. Tanta eſt igitur ipſa b c, linea recta, cuius dimidium, hoc eſt, ipſa b g, eſt partium 15, & minutorum 31,44,54,49 . Ipſius ergo b g, quadratum, erit partium 241,& minutorum 9,15,22,45,51,56,52,1 : quæ dempta ex quadrato ipſius a b, relinquunt partes 3358 , & minuta 50, 44,37,14,8,3,7,59: tantum eſt ergo quadratum ipſius a g,& ipſa proinde a g, partium 57,& minutorum 57,20,9,4. Quibus ſubtractis ex a f, quæ eſt partium 60, relinquitur g f, partium quidem 2,& minutorum 2,39,50,56: quorum quadratum, habet partes 6, unà cum minutis 10,46,29,35, 40,1, 12, 16 . Hoc porrò quadratum, iunctum quadrato ipſius b g, conficit quadratum ipſius b ſ, per ipſam 47 primi elementorum, partium uidelicet 245,& minutorum 20,1,52,21,31,58,4,17: huius autẽ quadrati radix, habet partes 15,& minuta 39,47,17,32. Tãta eſt igitur ipſa b f: & ipſius propterea b f dimidium, erit partium 7, & minutorum 49,53,38,46. Quorum quadratum habet partes 61,& minuta 20,0,28,1,2,18,51,16: quæ dempta ex 3600 partibus quadrati ipſius a b, relinquunt quadratum ipſius a i, partium quidem 3538,& minutorum 39,59,31,58,57,41,8,44. Huius porrò quadrati radix , hoc eſt ipſa recta a i, habet partes 59,& minuta 29,12,5,29: quibus detractis ex a h, quæ eſt partium 60, relinquitur i h, recta, partium 0, ſed minutorum 30,47,54,31. Horũ autem quadratum, habet itidem 0, ſed minuta tantùm 15,48,32,46,14, 16,4,1. Hoc autem quadratum , ſi componatur

ponatur quadrato ipsius b i, consurget quadratum ipsius b h, per sæpius allegatam 47 primi elementorum, partium quidem 61, & minutorum 35, 49, 0, 47, 16, 24, 55, 17 : quorum radix habet partes 7, & minuta 50, 54, 8, 25, 16. Tanta est igitur ipsa b h : cuius dimidium, hoc est ipsa b m, est partium 3, & minutorum 55, 27, 4, 12, 38. Eiusdem itaque b m quadratū, habet partes 15, & minuta 23, 57, 15, 11, 45, 19, 55, 43, 36, 4 : quæ subducta ex 3600 partibus quadrati ipsius a b, relinquunt quadratum ipsius a m, partium uidelicet 3584, & minutorum 36, 2, 44, 48, 14, 40, 4, 16, 23, 56. Horum porrò quadrata radix, siue recta a m, habet partes 59, & minuta 52, 17, 31, 40, 3 : reliqua igitur m l, erit partium 0 (cùm tota a l sit partium 60) & minutorum 7, 42, 28, 19, 57. Ipsius porrò m l quadratum, erit partium itidem 0, sed minutorum 0, 59, 24, 40, 32, 36, 31, 50, 0, 9 : quæ iuncta ipsi quadrato quod ex b m, conficiunt quadratum ipsius b l, partium 15, & minutorū 24, 56, 39, 52, 17, 56, 27, 33, 36, 13. Horum denique radix, habet partes 3, & minuta 55, 34, 53, 34 : tanta est igitur ipsa b l, hoc est, latus polygoni regularis habentis latera 96. Harum autem linearum & quadratorum supputationes, subscripta perstrinximus tabella.

	Supradictæ lineæ rectæ.						*Earumdem rectarum quadrata.*										
	ptes	m	2.	3.	4.	5.	partes	m.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
ab.	60	0	0	0	0	0	3600	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
be.	30	0	0	0	0	0	900	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ae.	51	57	41	29	14	0	2700	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ec.	8	2	18	30	46	0	64	37	1	32	1	47	22	35	16	0	0
bc.	31	3	29	49	38	0	964	37	1	32	1	47	22	35	16	0	0
bg	15	31	44	54	49	0	241	9	15	22	45	51	56	52	1	0	0
ag.	57	57	20	9	4	0	3358	50	44	37	14	8	3	7	59	0	0
gf.	2	2	39	50	56	0	4	10	46	29	35	40	1	12	16	0	0
fb.	15	39	47	17	32	0	245	20	1	52	21	31	58	4	17	0	0
bi.	7	49	53	38	46	0	61	20	0	28	1	2	18	51	16	0	0
ai.	59	29	12	5	29	0	3538	39	59	31	58	57	41	8	44	0	0
ih.	0	30	47	54	31	0	0	15	48	32	46	14	6	4	1	0	0
bh	7	50	54	8	25	16	61	35	49	0	47	16	24	55	17	0	0
bm	3	55	27	4	12	38	15	23	57	15	11	45	19	55	43	36	4
am	59	52	17	31	40	3	3584	36	0	44	48	14	40	4	16	23	56
ml	0	7	42	28	19	57	0	0	59	24	40	32	36	31	50	0	9
bl.	3	55	34	53	34	0	15	24	56	39	52	17	56	27	33	36	13

Porrò si partes 3, & minuta 55,34,53,34, ipsius b l, multiplicentur per 96, consurget ambitus ipsius polygoni regularis, partium 376, & minutorum 55, 49, 42, 24: Et proinde ambitus eiusdem polygoni regularis laterum 96, & in dato circulo descripti, ad ipsius circuli diametrum eam uidetur habere rationem, quam partes 376, & minuta 55,49, 42, 24, ad partes 120. Atqui præfatus semidiameter circuli triplicatus efficit partes 360: & $\frac{10}{71}$ eiusdem diametri, conficiunt partes 16, & minuta 54,5,55 (nam $\frac{1}{71}$ primum diametri partium 120, habet partem 1, & minuta 41,24,35,30) quæ simul iuncta, reddunt partes 376, & minuta 54,5,55. Hæc autem minora sunt eodem ambitu polygoni, minutis 1, 43,47,24. Inæqualium porrò quantitatum maior, ad eandem quantitatem maiorem rationem habet, quàm minor, per octauam quinti elementorum. Ambitus propterea ipsius pentagoni regularis, laterum 96, & in dato circulo descripti, ad ipsius circuli diametrum maiorem rationẽ habet tripla decupartiente septuagesimas primas. Et cùm circunferentia ipsius circuli, eodem ambitu inscripti polygoni sit maior: eadẽ propterea circunferentia, ad ipsum diametrũ maiorem à fortiori rationem obtinere uidetur eadem tripla decupartiente septuagesimas primas. Quod in primis demonstrare fuerat operæpretium.

	ptes.	m̄.	2̄.	3̄.	4̄.
Diameter circuli.	120	0	0	0	0
Triplum diametri.	360	0	0	0	0
$\frac{1}{71}$ *ipsius diametri.*	1	41	24	35	30
$\frac{10}{71}$ *eiusdem diametri.*	16	54	5	55	0
Terdiameter, cum $\frac{10}{71}$.	376	54	5	55	0
Ambitus polygoni.	376	55	49	42	24
Differentia.	0	1	43	47	24

¶ Quòd ratio eiusdem circunferentiæ ad ipsius circuli diametrum, minor est tripla sesquiseptima.

¶ DICO SECVNDO, QVO EADEM CIRCVNferentia circuli, *ad ipsius circuli diametrum rationem obseruat tripla sesquiseptima minorem. Id autem ex eodem figuræ contextu, præmissáque numerorum supputatione, uel facilè colligemus. Cùm enim recta b l, inuenta sit partium 3, & minutorum 55,34,53,34, qualium partium ipse diameter circuli est 120: dimidium ipsius b l, recta uidelicet b o, habebit partem 1, & minuta 57,47,26,47. Horum autem quadratum,* 5

est

est partium 3, & minutorum 51, 14, 39, 58, 27, 35, 20, 49: quæ dempta ex quadrato ipsius a b partium 3600, relinquunt quadratum ipsius a o, partes scilicet 3596, & minuta 8, 45, 20, 1, 32, 24, 39, 11. Horum autem radix quadrata, habet partes 59, & minuta 58, 4, 20, 48: tanta est igitur ipsa a o linea recta. Et quoniam triangula a o b, a n p, tum ex ipsa constructione, tum ex 29 primi elementorum, sunt inuicem æquiangula: erit per quartam sexti eorundem elementorum, ut a o recta ad ipsam o b, sic a n ad ipsam n p. Atqui tres primæ, iam nota sunt: nota erit igitur & ipsa quarta, per uulgatam quatuor proportionalium numerorum regulam. Multiplicabis igitur partem 1, & minuta 57, 47, 26, 47, ipsius o b, per 60 partes ipsius a n, fient partes 117, seu 1, 57, & minuta 47, 26, 47: traductis laurorsum singulis numerorum ordinibus, per unicum limitem. Hæc autem diuisa per 59 partes, & minuta 58, 4, 20, 48, ipsius a o, dant pro quoto numero partem 1, & minuta 57, 50, 23, 55: tanta est igitur eadem recta p n, quæ duplata conficit totum latus p r (sunt enim p n & n r, inuicem æquales) partium quidem 3, & minutorum 55, 40, 47, 50. Hac igitur per 96 multiplicata, producunt ambitum ipsius circunscripti polygoni regularis habentis latera 96, partiũ uidelicet 377, & minutorum 5, 16, 32: Vti subscripta numerorum uidetur indicare formula, qua reliquas lineas à prima supputatione comprehendit.

	¶ Reliquæ lineæ rectæ.							¶ Earundem rectarum quadrata.								
	ptes.	m.	2.	3.	4.	5.		partes.	m.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
b o.	1	57	47	26	47	0		3	51	14	39	58	27	35	20	49
a o.	59	58	4	20	48	0		3596	8	45	20	1	32	24	39	11
n p.	1	57	50	23	55	0		117	47	26	47.	Rectangulũ ex b o, in a n				
p r.	3	55	40	47	50	0										
	377	5	16	32	0	0	Ambitus circunscripti polygoni regularis laterum 96.									

Præfatus igitur ambitus circunscripti polygoni regularis, habentis latera 96, ad circuli diametrum eam uidetur habere rationem, quam partes 377, & minuta 5, 16, 32, ad partes 120. Atqui triplatus diameter partium 120, efficit partes 360: & septima pars ipsius diametri, est 7 partium similium, & minutorum 8, 34, 17, 8: quæ simul iuncta, conficiunt partes 377, & minuta 8, 34, 17, 8. Hac autem superant ambitum eiusdem circunscripti polygoni, minutis 3, 17, 45, 8. Idem

igitur ambitus circunſcripti polygoni regularis habentis latera 96, rationem habet ad circuli diametrum tripla ſeſquiſeptima minorem. Et quoniam circunferentia ipſius circuli, minor eſt ipſo ambitu eiuſdem circunſcripti polygoni: à fortiori itaque præfata circunferentia circuli, rationem habet ad ipſum diametrum tripla ſeſquiſeptima minorem. Quod ſecundo loco demõſtrandum ſuſceperamus.

Supradictorum formula.					
	ptes.	m̄	2̄.	3̄.	4̄.
Diameter circuli.	120	0	0	0	0
Triplum circuli.	360	0	0	0	0
$\frac{1}{7}$ ipſius diametri.	17	8	34	17	8
Terdiameter cum $\frac{1}{7}$.	377	8	34	17	8
Ambitus polygoni.	377	5	16	32	0
Differentia.	0	3	17	45	8

¶Circunferentiam circuli, ad ipſum diametrum rationem habere triplam undecupartientem ſeptuageſimas octauas.

¶EX SVPRADICTIS TANDEM COLLIGI- 6
tur, rationem circunferentiæ circuli ad ipſum diametrũ, inter ipſam triplam decupartientem ſeptuageſimas primas, & triplam ſeſquiſeptimam de neceſſitate uerſari. Vera itaque ratio eiuſdem circunferentiæ ad diametrum circuli, ex ipſis duabus uel facilè componetur: addendo uidelicet adinuicem fractas earundem rationum quantitates, utpote $\frac{1}{7}$, & $\frac{10}{71}$, numeratorem quidem numeratori, & denominatorem denominatori. Conſurgent enim $\frac{11}{78}$, mediam quandam rationem inter rationes ſupradictas exprimentia: minorem uidelicet tripla ſeſquiſeptima, & maiorem tripla decupartiente ſeptuageſimas primas: & proinde omnium fideliſſimam. Quemadmodum ex ſubſcriptis numerorum elicitur formulis. In quarum prima, $\frac{1}{7}$ & $\frac{11}{78}$ reducuntur ad $\frac{155}{546}$: quorum 78 fiunt ab $\frac{1}{7}$, & 77 a b ipſis $\frac{11}{78}$. In ſecunda uerò formula, præfata $\frac{11}{78}$ & $\frac{10}{71}$ reducũtur ad $\frac{1561}{5538}$: quorum 781 procreãtur ab ipſis $\frac{11}{78}$, & 780 ab eiſdem $\frac{10}{71}$. Et quemadmodum 78, ipſa 77 ſola unitate ſuperant: ſic & ipſa 781 eadem 780 ſuperare uidentur. Circunſerentia itaque circuli, ad ipſum, diametrum rationem obtinet triplam undecupartientem ſeptuageſimas octauas: qualem propemodum obſeruant partes 376, & minuta 55, 23, 4, 36,

	155.			1561.	
78.		77.	781.		780,
$\frac{1}{7}$.	X	$\frac{11}{78}$.	$\frac{11}{78}$.	X	$\frac{10}{71}$.
	546.			5538.	

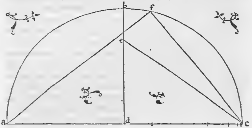
4,36,52, ad partes 120. *Quadrans uerò eiusdem circunferentiæ ad semidiametrum eam pendenter uidetur obseruare rationem, quam partes 94, & minuta 13,20,46, 9,13, ad partes* 60. *Ter igitur diameter unà cum $\frac{11}{78}$ ipsius diametri, conficiunt rectam lineam æqualem circunferentiæ dati circuli: qua ratione, uix speramus à quopiam mortalium posse dari fideliorem. De hac igitur hæc sint satis.*

PROPOSITIO II.

Quadranti circunfetentiæ dati cuiuslibet circuli rectam lineam æqualem, aliter quàm per rationem ipsius circunfetentiæ ad diametrum, pluribus modis designare.

¶TAMETSI EX ANTECEDENTI PRIMA *propositione apertum fecerimus, circunferentiæ quadrantem ad ipsum diametrum rationem propemodum obseruare, quam partes 94 & minuta 9,50,46,9,13, ad partes 120: iuuat nihilominus, eidem quadranti circunferentiæ rectam lineam æqualem alia ratione colligere, nempe segmentorum proportionalium ipsius dimetientis adminiculo.*

1 ¶ *Sit igitur datus semicirculus a b c, cuius circunferentia bifariam sit diuisa, sub d b semidiametro, in ipso puncto b: & operæpretium sit quadranti a b rectã æqualẽ inuenire. Diuidatur itaque dimetiẽs a c proportionaliter, atq; segmentũ illius minus iterum proportionaliter, rursumq;*



ſegmentum minus proportionaliter, & deinceps in hunc modum, per 30 ſexti elementorum, minoribus ſegmentis in punctum c continuè terminatis: quatenus in toto dimetiente a c nouem occurrant proportionalium ſegmentorum diſtinctiones, nouem maiora, totidémque minora ſegmenta diſtribuentes, quæ numeris ſuo annotentur ordine. Secetur poſtmodum ex d b ſemidiametro, recta quædam linea d e: quæ conſtet ex dimidio ſegmenti maioris ipſius dimetientis a c, & dimidio ſegmenti ordine quinti, atque dimidio octaui ſegmenti, unà cum ſegmento decimo ſexto, & quarta parte ſegmenti quindecimi, atque demum unius octauæ partis ſegmenti ordine decimiſeptimi parte ſexageſima. Connectatur deinde linea recta c e: cui æqualis coaptetur c f, per primam quarti elementorum. Tandem connectatur a f linea recta: quam aio æqualem eſſe quadranti circunferentiæ a b. Hoc autem per ipſorum proportionalium ſegmentorum numeros, fiet illico manifeſtum: coadiuuante præoſtenſa ratione circunferentiæ ad diametrum. ¶*Supponatur ergo dimetiens a c partium inuicem æqualium* 120: *quantum uidelicet ad imitationem* C. Ptolemæi, *in cæteris noſtris ſupputationibus expoſuimus. Per ea igitur quæ numero ſecundo primæ propoſitionis antecedentis libri primi declarata ſunt, ſegmentum maius ipſius dimetientis a c, erit partium* 74, *& minutorum* 9, 50, 40, 59, 18, 14: *minus uerò ſegmentum, partium* 45, *& minutorum* 50, 9, 19, 0, 41, 46. *Quibus detractis ex* 74 *partibus, & minutis* 9, 50, 40, 59, 59, 18, 14, *ipſius ſegmenti maioris: relinquetur ſegmentum maius eiuſdem ſegmenti minoris, partium quidem* 28, *& minutorum* 19, 41, 21, 58, 36, 28. *Quæ ſubducta ex ipſo minori ſegmento totius diametri: relinquunt ſegmentum minus eiuſdem ſegmenti minoris, partium* 17, *& minutorum* 30, 27, 57, 2, 5, 18.

Segmenta proportionalia diametri, partium 120.								
	ptes	m.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
i.	74	9	50	40	59	18	14	0
ij.	45	50	9	19	0	41	46	0
iij.	28	19	41	21	58	36	28	0
iiij	17	30	27	57	2	5	18	0
v.	10	49	13	24	56	31	10	0
vi.	6	41	14	32	5	34	8	0
vij.	4	7	58	52	50	57	2	0
viij	2	33	15	39	14	37	6	0
ix.	1	34	43	13	36	19	56	0
x.	0	58	32	25	38	17	10	0
xi.	0	36	10	47	58	2	46	0
xij	0	22	21	37	40	14	24	0
xiij.	0	13	49	10	17	48	22	0
xiiij.	0	8	32	27	22	26	2	0
xv.	0	5	16	42	55	22	20	0
xvi.	0	3	15	44	27	3	42	0
xvij.	0	2	0	58	28	18	38	0
xviij.	0	1	14	45	58	45	4	0

Et

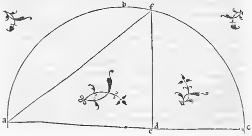
Et deinceps in hunc continuando modum, hoc est, succedentia diametri segmenta, ab immediatè præcedentibus subducendo segmentis: reliqua segmenta proportionalia ipsius dimetientis a c, suo colligentur ordine, sub ipsis quidem partibus & minutis, qualium præfatus diameter est 120, & pars quælibet minutorum 60 comprehensa. Vt in obiecta numerorum tabella continetur. ¶ *Dimidium itaque segmenti maioris habet partes 37, & minuta 4, 55, 20, 29, 39, 7: & dimidium quinti segmenti partes 5, & minuta 24, 36, 42, 28, 15, 35. Dimidium insuper octaui segmenti, habet partem 1, & minuta 16, 37, 49, 37, 18, 33. Segmentū porrò decimumsextum, hæc minuta comprehendit 3, 15, 44, 27, 3, 42. Et segmentum ordine quindecimum, sub his continetur minutis 5, 16, 42, 55, 22, 20: quorum pars quarta, habet minuta 0, 1, 19, 10, 13, 20, 35. Segmentum denique decimumseptimum, sub his comprehenditur minutis 2, 0, 58, 28, 18, 38: quorum octaua pars, est minutorum 0, 15, 7, 18, 32, 20: & horum pars sexagesima, eisdem minutorū exprimitur numeris, sed mutata singulorum denominatione in proximè sequentē dextram uersus ordinem, in hunc uidelicet modum 0, 0, 15, 7, 18, 32, 20. Hæc autem omnia simul iuncta efficiunt partes 43, & minuta 49, 27, 11, 19, 48, 49, 55: ut obiecta numerorum indicat formula. Tanta est igitur recta d e. Quadratum autem ipsius d e, habet partes 1920, & minuta 33, 43, 51, 13, 35, 23, 59, 26, 54, 48, 41, 40: Et quadratum 60 partium semidiametri d c, est partium 3600. Quadrata porrò ex d e & d c simul iuncta, conficiunt quadratum ipsius e c, per 47 primi elementorum: & proinde quadratum ipsius c f, partium quidem 5520, & minutorum 33, 43, 51, 13, 35, 23, 59, 26, 54, 48, 41, 40. Quadratum insuper totius diametri a c, habet partes 14400: à quibus si auferatur quadratum ipsius c f, relinquetur quadratum quod ex a f, per eandem 47 primi elementorum, partium uidelicet 8879, & minutorum 26, 16, 8, 46, 24, 36, 0, 33, 5, 11, 19, 20. Quorum radix quadrata (quantum ars ipsa patitur numerorū) habet*

	ptes.	m̄.	2̄.	3̄.	4̄.	5̄.	6̄.	7̄.
½ segmenti maioris.	37	4	55	20	29	39	7	0
½ quinti segmenti.	5	24	36	42	28	15	35	0
½ octaui segmenti.	1	16	37	49	37	18	33	0
xvi segmentum.	0	3	15	44	27	3	42	0
¼ segmenti xv.	0	0	1	19	10	13	20	35
$\frac{1}{60}$ $\frac{1}{8}$ segmenti xvij.	0	0	0	15	7	18	32	20
¶ Recta d e.	43	49	27	11	19	48	49	55

partes 94, & minuta 13, 50, 46, 5, 42. Tanta est igitur recta a f. Atqui totidem partium atque primorum, secundorum & tertiorum minutorum, est quadrans circunferentiæ eiusdem circuli, cuius diameter est partium 120, sed quartorum minutorum 9, & quintorum 13 per antecedentem primam propositionem. Differt itaque recta a f ab ipso quadrante a b, tribus quartis minutis, & 30 ferè quintis: quæ faciunt $\frac{1}{20}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}$, *unà cum* $\frac{1}{2}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}$, *& reducuntur propemodum ad* $\frac{1}{3702857}$, *unius integræ partis, imperfectis irrationalium segmentorum, radicúmue non quadratorum numeris (ex quibus conflatur recta d e) iure deputandũ: contrahit enim de necessitate recta e c uel c f, ineuitabile peccatum ipsius d e. Cùm igitur præmemorata differentia* $\frac{1}{3702857}$ *unius integræ partis adeò sit exigua, & uitari nullo modo posit: concludemus rectam ipsam a f, æqualem esse quandranti circunferentiæ a b, cuius dimidium est a b c. Quod faciendum receperamus.*

¶ Idem aliter.

¶ EIDEM RVRSVM QVADRANTI CIRCVN- 2
ferentiæ, rectam lineam æqualem, ex præfatis segmentis proportionalibus diametri, aliter describere licebit. Resumatur ergo semicirculus a b c, cuius circunferentia bifariam diuisa sit in puncto b: diameter autem a c diuisus proportionaliter in puncto d, sitque a d segmentum maius, minus uerò d c. quod rursum in tot segmenta proportionalia, eodem ordine atque numero distributa partiatur, ut in prima huius parte tradidimus. Auferatur postmodum sexagesima pars unius sedecimæ partis



ſegmenti ordine decimioctaui, ex quinta parte ſegmenti quindecimi: & reſiduum tollatur conſequenter ex dimidio ſegmenti ordine duodecimi. Ei *autem quæ inde relinquetur lineolæ, æqualis ſecetur d e.* Et *à puncto e, ſuper a c diametrum perpendicularis excitetur e f, per undecimam primi elementorum.* Connectatur *demum recta a f, quam aio fore æqualem quadranti a b ipſius circunferentiæ dati circuli: quod uia numerorū oſtendere iuuat.* ¶ Manifeſtum *eſt itaque ex præmiſſo ſegmentorum proportionalium calculo, decimumoctauum ſegmentum proportionale ipſius dimetientis a c, continere unius partis minuta ſexagenaria* 1, 14, 45, 58, 45, 4: *quorum pars ſedecima, habet minuta* 0, 4, 40, 22, 19, *ferè: quæ diuiſa per* 60, *dant minuta* 0, 0, 4, 40, 22, 19. Quindecimum *porrò ſegmentum, ſub his continetur minutis* 5, 19, 42, 55, 22, 20: *quorum pars quinta eſt minutorū* 1, 3, 20, 35, 4, 28. A *quibus ſi auferantur minuta* 0, 0, 4, 40, 22, 19 *relinquentur in primis minuta* 1, 3, 15, 54, 42, 9: *quæ dempta ex dimidio ſegmenti duodecimi, ex minutis uidelicet* 11, 10, 48, 50, 7, 12, *relinquunt minuta* 10, 7, 32, 55, 25, 3. Tanta *eſt igitur lineola d e: quæ ſubducta ex* 74 *partibus, & minutis* 9, 50, 40, 59, 18, 14, *ipſius ſegmenti maioris a d, relinquunt a c partium* 73, *& minutorum* 59, 43, 8, 3, 53, 11. Et *proinde reliqua e c habebit partes* 46, *& minuta* 0, 16, 51, 56, 6, 49. Si *ducatur autem a e recta, in reliquam e c: fiet quadratum ipſius e f, partiū quidem* 3404, *& minutorum* 7, 52, 9, 26, 43, 59, 5, 47, 57, 45, 31, 59.

.	ptes.	m̄.	2̄.	3̄.	4̄.	5̄.	6̄.
Segmentum maius a d.	74	9	50	40	59	18	14
$\frac{1}{2}$ *ſegmenti xij.*	0	11	10	48	50	7	12
$\frac{1}{5}$ *ſegmenti xv.*	0	1	3	20	35	4	28
$\frac{1}{60}$ $\frac{1}{16}$ *ſegmenti xvij.*	0	0	0	4	40	22	19
Primum reſiduum.	0	1	3	15	54	42	9
Secundum reſiduum.	0	10	7	32	55	25	3
Recta a e.	73	59	43	8	3	55	11
Reliqua e c.	46	0	16	51	56	6	49

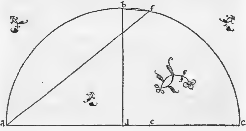
Eſt *enim e f media proportionalis inter a e & e c, per* 13 *ſexti elementorū: & quod ſub ipſis a e & e c continetur rectāgulum, æquale ei quod ab ipſa e f fit quadrato, per* 17 *eiuſdem ſexti elementorum.* Quadratū *porrò ipſius a e, habet partes* 5475, *& minuta* 18, 23, 58, 19, 28, 0, 54, 12, 2, 14, 28, 1. Ex *quadratis autem ipſarūm a e & e f, conſurgit quadratum ipſius a f, per* 47 *primi eorundem elementorum: partiū quidem* 8879, *& minutorum* 26, 16, 7, 46, 22, 0. *tanta eſt recta a f.* Totidem *autem partium, atque primorum, ſecundorum, & tertio-*

rum minutorum, est recta quadranti circunferentiæ æqualis, per primæ propositionis huiusce libri secundi demonstrationem: sed quartorum minutorum 9, & quintorum 13. Differt itaque præsens calculus, ab ipsius primæ propositionis calculo, tribus minutis quartis, & quintis minutis 50: quæ faciunt $\frac{1}{20}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}$, & $\frac{5}{6}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}$, & reuocantur propemodum ad $\frac{1}{3380870}$ unius integræ partis. Hac itaque differẽtia non obstãte (cùm sit adeò minuta, ut animaduersione censeatur indigna) ex solito irrationalium segmentorum, atque radicum non quadratarũ contracta peccato: concludemus, ueluti supra, rectam a f æqualem esse quadranti a b propositæ circunferentiæ circuli. Quod rursum fecisse oportuit.

¶ Idem rursum aliter.

¶POTERIT INSVPER EIDEM CIRCVNFE- 3
rentiæ quadranti, dari recta æqualis: in hunc qui sequitur modum. Exponatur uelut antea semicirculus a b c, super a c diametro consistens cuius segmentum maius proportionale sit a e, minus uerò e c: quod rursum in tot segmenta proportionalia, & eodem ordine distributa partiatur, ut in prima parte huiusce propositionis dictum atque obseruatum extitit. Excitetur postmodum semidiameter d b super a c diametro perpendicularis. Coaptetur insuper recta quædã linea b f, quæ constet ex dimidio segmẽti proportionalis ordine tertij, aut ex ipsa d e, subtracto prius dimidio segmẽti decimiquarti, minus sexagesima parte unius sextæ partis ipsius decimiquarti segmenti: & connectatur demum a f linea recta.

Aio

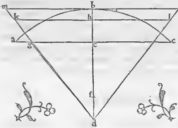


Aio itaque, rectam a f æqualem esse circunferentiæ quadranti a b. ¶ *Per ea etenim, quę prima huius parte tradita atque supputata sunt, equaliū partium diameter a c est 120, talium segmentum proportionale ordine tertium est 28, & minutorum 19, 41, 21, 58, 36, 28: quorum dimidium, habet partes 14, & minuta 9, 50, 40, 59, 18, 14.* Totidem etiā partium, *atque minutorum, est ipsa d e: nam si ex maiori segmento a e, auferatur 60 partes ipsius a d semidiametri, idem partium atque minutorū relinquetur numerus.* Dimidium autē decimi quarti segmenti proportionalis, *sub his continetur minutis 4, 16, 13, 41, 13, 1, & sexta illius segmenti pars, hæc minuta cōtinere uidetur, 1, 25, 24, 33, 44, 20: quorū pars sexagesima, eisdem exprimitur numeris, sed mutatis sedibus per unum ordinem uersus dextrā, in hūc modū, 0, 1, 25, 24, 33, 44, 20.* Hæc autē *subducta ex minutis 4, 16, 13, 41, 13, 1, relinquunt minuta 4, 14, 48, 16, 39, 16, 40: quæ si detrahātur ex præfatis 14 partibus, & minutis 9, 50, 40, 59, 18, 14, relinquent tandem partes 14, & minuta 35, 52, 42, 38, 57, 20.* Totidem *itaque partium & minutorum est ipsa b f: cuius arcus, per ea quę de rectis in circulo subtensis tradidimus, habet gradus 13, & minuta 29, 21, 10, 21, 55, 7, 4, qualium graduum (uelim intelligas) tota circuli peripheria est 360.* Totus *proinde arcus a b f, est graduum 103, & minutorum 29, 21, 10, 21, 55, 7, 4: quorum subtensa chorda a f, continet partes 94, & minuta 13, 55, 45, 44, 15, ferè.* Recta *igitur a f, quadranti a b cōuincitur æqualis: cùm solis propemodū 25 minutis quartis, ab ipsius primæ propositionis calculo differre uideatur, quæ faciūt* $\frac{5}{12}$ $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{60}$, *& reducuntur ad* $\frac{1}{518400}$, *uicio radicum non quadratarum (quæ ueris nunquam exprimuntur numeris (ueluti sæpiùs dictum est, adscribendum.* Quadranti *igitur circuli, rectam æqualem iterum designauimus.*

¶ Idem rursum aliter.

4 ¶ QVARTO, POTERIT IDEM CIRCVNFErentiæ *quadrans, in lineam rectam hoc modo reuocari.* Sit *igitur oblatus circuli quadrans a b c, bifariam diuisus in puncto b per 30 tertij elementorum: & per 25 ipsius tertij, inueniatur centrum circuli, cuius datus arcus est quarta pars, sitque illud d: cōnectanturq; a c & b d lineę rectę, quę sese inuicē secent in puncto e.* Diuidatur *postmodū semidiameter d b*

proportionaliter, seu media & extrema ratione, atque segmentum illius minus iterum proportionaliter, & deinceps in hunc modum, per 30 sexti elementorum: donec in toto semidiametro d b, octo maiora, totidemque minora segmenta colligantur, omnibus segmentis minoribus in unum commune punctum scilicet d uel b terminatis: ut in prima huius parte, de segmentis proportionalibus diametri dictū atque obseruatum extitit. Secetur consequenter ex ipso d b semidiametro, recta quædam linea b f, quæ resultet ex duplo segmenti minoris ipsius d b semidiametri, & octauo, atque duodecimo segmento proportionali, unà cum septem trigesimis segmenti ordine quindecimi. Sicut autem d b ad ipsam b f, sic fiat a e ad ipsam e g, per decimam sexti elementorum: & connectatur d g linea recta, cui æqualis secetur d h. Deinde, per punctum h ipsi a c lineæ rectæ parallela ducatur k l, per 31 primi elementorum: secēturque h k & h l ipsi a e uel e c æquales. Tangat autem recta quædam linea m n ipsum datum quadrantis arcum a b c in puncto b, utrique ipsarum a c & k l parallela. Et connexis d k & d l lineis rectis, utraque in directum continuetur uersus k & l: donec conueniant ipsam m n, in eisdem punctis m & n. Erit enim recta m n inter d m atque d n comprehensa, æqualis ipsi dato quadranti a b c: quod numerorum officio, in hunc qui sequitur modum demonstratur.



¶ Sit ueluti sæpius dictū est, semidiameter d b partium 60. Huius itaque semidiametri segmenta proportionalia illico fient nota, si proportionalium segmentorum totius diametri, in prima huius parte descriptorum, acceperis dimidium. Minus itaque segmentum proportionale ipsius d b, habet partes 22, & minuta 55, 4, 39, 30, 20, 53: quæ duplata, efficiunt partes 45, & minuta 50, 9, 19, 0, 41, 49. Octauum porrò segmentum habebit

habebit partem 1, & minuta 16,37,49,37,18,33 : & duodecimum segmentum, sub his tantùm continebitur minutis 11,10,48,50,7,12. Quindecimum denique segmentum proportionale, hæc minuta comprehendet 2,38,21,27,41,10 : quorum pars trigesima, est minutorum 0,5, 10, 20,55,22,20, quę septies sumpta reddũt minuta 0,36,57,27,36,20. Hęc autem 7 trigesima, unà cum duplo secundi segmenti proportionalis, & octauo, atque duodecimo segmento, in unum conflata numerum, reddũt partes 47, & minuta 18, 34,54, 28, 35, (cætera enim absque iactura calculi reiici uel facilè possunt) tanta est igitur ipsa b f, linea recta :

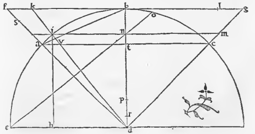
	ptes.	m̃.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Duplũ segmenti, ij.	45	50	9	19	0	41	46	0
Segmentũ { viij.	1	16	37	49	37	18	33	0
Segmentũ { xij.	0	11	10	48	50	7	12	0
$\frac{7}{30}$ segmenti, xv.	0	0	36	57	0	27	36	20
¶ Recta, b f.	47	18	34	54	28	35	7	20

quam si multiplicaueris per rectam a e, quę est partiū 42, & minutorum 25,35,3,53, (nēpe dimidium lateris inscripti quadrati) consurgent partes 33,27, & minuta 10, 49, 34,47,20, 48,57,59,55 : quæ diuisa per 60 partes ipsius d b, reuocantur in partes 33, & minuta 27,10,49,34,47 (cæteræ nanque minutiores fractiones, absque iactura calculi reiici possunt) tãta est igitur recta e g, per uulgatam quatuor proportionalium numerorum regulã : cuius quadratũ habet partes 1119, & minuta 6,13,18,50,12,51,48,55,52,49. Quadratum porrò ipsius d e, quæ est æqualis ipsi e a, sub his tãtum continetur partibus 1800 : quæ simul iuncta, conficiunt quadratum ipsius d g, per 47 primi elementorum, partium quidem 2919, & minutorũ supradictorũ 6,13,18,50,12,51,48,55,52,49. Huius autẽ quadrati radix, hoc est, ipsa d g, recta, & proinde illi æqualis d h, habet partes 54, & minuta 1,43,25,44. Si ducantur tandem partes 42, & minuta 25, 35,3,53, ipsius h k (quæ posita est æqualis ipsi e a) per 60, partes ipsius d b, & productum diuidatur per 54 partes, & minuta 1,4,25,44, ipsius d h, nascentur partes 47, & minuta 6,55,23,4,25, ipsius b m, per eandem quatuor proportionalium regulam : Triangula enim d b m, & d h k, sunt inuicem æquiangula, per 29, & 32 primi elementorũ : & per 4 sexti eorundem elementorũ, est sicut d h, ad h k, sic d b, ad ipsam d m. Tota proinde m n, est partiũ 94, & minutorum 13,50,46,8,50. Atqui totidem partium, atq; primorũ, secundorũ : & tertiorũ minutorũ, inuẽta

est recta ipsi quadranti æqualis, per demonstratam circunferentiæ rationem ad ipsum diametrum: sed quartorum minutorum 9, & quintorum 13. Quorum differentia est quintorum minutorum 23, quæ faciunt $\frac{23}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{60}$, *& reducuntur propemodum ad* $\frac{1}{33808696}$ *unius integræ partis, nihili prorsus existimandum, si irrationalium segmentorum, atque non quadratarum radicum (quæ præcisis nunquam exprimuntur numeris) natura consideretur. Recta igitur m n, æqualis est circunferentiæ quadranti a b c: quod numeris confirmandum susceperamus.*

¶ Idem rursum pluribus modis.

PLACET TANDEM, ALIQVOT SVBNECTERE *modos conuertendi præfatum circunferentiæ quadrantem in lineam rectam, à nobis (dum hoc scriberemus) obiter excogitatos: nullis quidem aliis in præsentiarum, quàm ocularibus demõstrationibus (euitandæ prolixitatis gratia) præmunitos. Sit igitur rursum datus circunferentiæ quadrans a b c, bifariam diuisus in ipso puncto b: cuius chorda, sit a c, linea recta. Et compleatur semicirculus, cuius centrum sit punctum d, & dimidium ipsius diametri d e: connectatúrque d b, semidiameter super ipso diametro perpendicularis. Tangat insuper eundem semicirculum e b c, in ipso quidem puncto b, latus circunscripti quadrati f b g, eidem chordæ a c, atque diametro parallelum: & connectantur d a f, & d c g, lineæ rectæ, eiusdem circunscripti quadrati semidiametri.* ¶ *His in hunc modum constructis, diuidatur in primis* 5



d e,ſemidiameter per extremam & mediam rationem,ſeu proportionaliter in puncto h,cuius ſegmentum maius ſit d h, per ſæpiùs allegatã 30 ſexti elementorum.Et à puncto h, perpendicularis excitetur h i, cadens in circunferentiæ punctum i. Connexa nanq; d i,linea recta,directéq; producta in punctũ k,ipſius f g,lineæ rectæ:erit recta b k,æqualis dimidio quadrãtis a b c,& proinde dupla ipſius b k,utpote k l,eidẽ quadrãti
B *coæqualis.*¶ *Idem habebis,ſi per idem punctũ i,utrique ipſarum a c, & f g,parallela ducatur i m, per 31 primi elementorũ, inter d f, & d g, rectas cõprehenſa:erit enim eadẽ parallela,æqualis ipſi dato circunferen-*
C *tiæ quadranti a b c.* ¶*Item,ſi per ſectionem eiuſdẽ parallelæ cum d b,ſemidiametro,quæ ſit in puncto n, recta ducatur e n, in directúmq; producatur uſque ad circunferentię punctum o:erit rurſum e o,linea recta,*
D *eidem quadranti æqualis.*¶ *Aut ſi inter d f,& d b,rectas,duæ mediæ lineæ rectæ ſub eadem ratione continuè proportionales inueniantur,illarum maior & ordine ſecunda, erit æqualis ipſi d k: unde rurſum b k, recta limitabitur,dimidio quadranti a b c (ut ſuprà dictum eſt) æqualis.*
E ¶ *Adde,quòd ſi connectatur a b,recta, & illi æqualis ſecetur b p, reſiduáque p d,proportionaliter diuidatur in puncto r, cuius ſegmentũ maius ſit p r,atque ipſi p r,æqualis ſecetur ſ s:erit rurſum d s,recta,æqualis ipſi d k, unde prodibit recta b k,æqualis (ut dictum eſt ſuprà) dimidio*
F *quadrantis a b c.*¶*Tandem ſi d b,ſemidiameter,diuiſerit rectam a c, in puncto t,& d k,linea recta in puncto u:atque inter a, & d t,rectas, duæ mediæ lineæ rectæ ſub eadem ratione continuè proportionales inueniantur:illarũ maior & ordine ſecunda,erit æqualis ipſi d u,& in directum producta coincidet in punctum k,limitabítque rurſum eandem*
G *b k,dimidio præſati quadrantis æqualem.* ¶*Nota demum,quòd g m,eſt æqualis ipſi b t:hinc ducta per m,punctum ipſi ſ g,parallela,coincidet in punctum i,eritque æqualis ipſi quadranti a b c.*

¶ Corollarium I.

¶ *Vnius itaque circuli quadrante,in rectam lineam conuerſo: dati cuiuſlibet alterius circuli quadrans,in rectam itidem lineam uel facilè reducetur.Quam enim rationẽ habet diameter ipſius circuli, cuius quadrãti data eſt æqualis linea recta,ad ipſam lineam rectam:eandẽ obſeruat alterius circuli diameter ad eam lineam rectam, quæ quadranti eiuſdẽ circuli coæquatur.Atqui tres primæ lineæ,notæ ſupponuntur:nota*

erit igitur & ipsa quarta proportionalis, per 12 sexti elementorum.

¶Corollarium II.

¶ *Toti praeterea circunferentiae circuli, ac cuilibet ordinatae eiusdem circunferētiae parti, à dato quouis numero denominatae, dabitur aequalis linea recta. Quadrupla enim eius rectae, quae circunferentiae quadranti est aequalis, toti circunferentiae de necessitate coaequatur. Et ab eadem recta toti circunferentiae aequali, pars ordinata potest abscindi, etiam à dato quouis denominata numero, per 9 sexti elementorum: quae ipsi ordinatae atque simili parti circunferentiae erit aequalis. Sunt enim partes aequalium & aequè multiplicium, similes adinuicem: & proinde ipsis aequè multiplicibus proportionales, per 15 propositionem libri quinti elementorum: & aequales propterea adinuicem.*

Corollarium III.

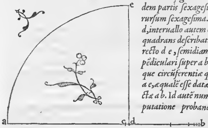
¶ *Ratio insuper circunferentiae circuli, ad eius diametrum, uel semidiametrum: quae lineae rectae, ad lineam rectam data erit. Datur enim linea recta ipsi circunferentiae aequalis, per antecedentem primā propositionē, uel immediatum corollarium: & aequales ad eandem uel aequales, eandem habent rationem, per septimam quinti elementorum. Quam igitur rationem habebit linea recta circunferentiae aequalis, ad ipsum diametrum uel semidiametrū: eandem obseruabit & praefata circunferentia.*

PROPOSITIO III.

DATA linea recta, describere circulum, cuius circūferentiae quadrans eidem lineae rectae sit aequalis.

¶HANC PROPOSITIONEM, TRIBVS MODIS 1
absoluemus: in primis adminiculo segmentorum proportionalium ipsius datae lineae rectae, in hunc qui sequitur modum. Sit igitur data linea recta ab, quae per mediam & extremam rationem, proportionalitérue diuidatur in puncto c, cuius segmentum maius sit ac, minus uerò cb: quod rursum in tot segmenta proportionalia subdiuidatur, eo quidem modo & ordine distributa, ut de circuli diametro proxima dictum atque obseruatum fuit propositione: donec uidelicet in tota linea data,

data, sint nouem maiora, totidemque minora segmenta proportionalia, omnibus segmentis minoribus in ipsum punctum b terminatis. Secetur postmodum ex c b, minori segmento, addatúrue segmento maiori a c, recta quædam lineola c d: quæ constet ex dimidio quinti segmenti proportionalis, & tertia parte tredecim, necnon septima parte segmenti ordine decimioctaui, unà cum sexagesima parte trium quartorum ipsius decimioctaui segmenti, atque eiusdem partis sexagesimæ parte rursum sexagesima. Et centro d, interuallo autem d a, circuli quadrans describatur a e d, recto d e, semidiametro perpẽdiculari super a b. Aio itaque circũferentiæ quadrantẽ a e, æqualẽ esse datæ lineæ rectæ a b. Id autẽ numerali supputatione probandum esse duximus.



¶ *Supponatur igitur data linea recta a b, partium inuicem æqualium 60. Et quoniam proxima, & ordine secunda, huius secundi libri propositione, diameter circuli coassumptus est partium inuicem æqualium 120, & in 18 segmenta proportionalia distributus, quorum numeri propria tabella ibidem sunt expressi: si dimidij propterea eorundem segmẽtorum proportionalium assumantur numeri, prosilient illico segmenta proportionalia eiusdem numeri sexagenarij, cum is sit dimidius eorundem 120. Sicut enim totum, ad totum: sic pars similis, ad partem similem. Hæc igitur segmenta proportionalia ipsius a b, lineæ datæ (quam supponimus esse partium 60) iuxta præscriptum ordinem distributa, in eam quæ sequitur redegimus tabellam, tum in gratiam huius, tum aliarum similium demonstrationum paratissimam. Constat igitur (ut ad susceptam perueniamus demonstrationem) dimidium quinti segmenti habere partem 1, & minuta 4,55,20,29,39,7: & unum tertium segmenti decimitertij, hæc cõtinere minuta 2,18,11,42,58,3,40. Vnum porrò septimum decimioctaui segmenti, his tãdem uidetur resultare minutis 0,5,20,25,37,30,17. Et tria ipsius decimioctaui segmenti quar-*

Segmenta proportionalia lineæ partium 60.								
	ptes.	m̄.	2̄.	3̄.	4̄.	5̄.	6̄.	7̄.
i.	37	4	55	20	29	39	7	0
ij.	22	55	4	39	30	20	53	0
iij.	14	9	50	40	59	18	14	0
iiij.	8	45	13	58	31	2	39	0
v.	5	24	36	42	28	15	35	0
vi.	3	20	37	16	2	47	4	0
vij.	2	3	59	26	25	28	31	0
viij.	1	16	37	49	37	18	33	0
ix	0	47	21	36	48	9	58	0
x.	0	29	16	12	49	8	35	0
xi.	0	18	5	23	59	1	23	0
xij.	0	11	10	48	50	7	12	0
xiij.	0	6	54	35	8	54	11	0
xiiij	0	4	16	13	41	13	1	0
xv.	0	2	38	21	27	41	10	0
xvi.	0	1	37	52	13	31	51	0
xvij.	0	1	0	29	14	9	19	0
xviij.	0	0	37	22	59	22	32	0

ta, continent minuta 0,28,2,4,31,54: quorum pars sexagesima prodibit, si singuli numeri per unicum ordinē dexteam uersus reuocentur, in hunc modum 0,0,28,2,4,31,54: & horum rursum pars sexagesima, sic pendenter habebit, 0,0,0,28,2,4,32, ferè. Quæ simul de more coniuncta, conficiunt partem 1, & minuta 7,19,21,8,21,17,23: tāta est igitur recta c d. Cui si addantur partes 37, & minuta 4,55,20,29,39,7, ipsius segmenti maioris a c, resultabit a d, recta, semidiameterue propositi circuli partium quidem 38, & minutorum 12,14,41,38,0,24,23. Totus propterea diameter habebit partes 76, & minuta 24,29,23,16,0,48,46: & ipsius diametri triplum, partes 229, & minuta 13,28,9,48,1,13,9.

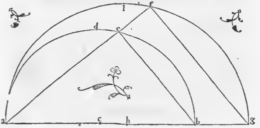
	ptes.	m̄.	2̄.	3̄.	4̄.	5̄.	6̄.	7̄.
$\frac{1}{2}$ *quinti segmenti.*	1	4	55	20	29	39	7	0
$\frac{1}{3}$ *segmenti xiij.*	0	2	18	11	42	58	3	40
$\frac{1}{7}$ *segmenti xviij.*	0	0	5	20	25	37	30	17
$\frac{1}{60}\frac{3}{4}$ *eiusdem.*	0	0	0	28	2	4	31	54
$\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{3}{4}$ *eiusdem.*	0	0	0	0	28	2	4	32
Horū summa, c d.	1	7	19	21	8	21	17	23
Segmentum, a c.	37	4	55	20	29	39	7	0
Semidiameter, a d.	38	12	14	41	38	0	24	23
Diameter.	76	24	29	23	16	0	48	46
Triplum diametri.	229	13	28	9	48	1	13	9
$\frac{11}{78}$ *diametri.*	10	46	31	50	12	15	29	55
Circunferentia.	240	0	0	0	0	16	43	4
Quadrans, a e.	60	0	0	0	0	4	10	46

Eiusdem porrò dimetientis pars septuagesimaoctaua, continet minuta 58, 46,31,50,12,19,5: quæ undecies sumpta, reddunt partes 10, & minuta 46,31,50,12,15,29,55. Atqui triplum diametri, unà cum ipsis undecim septuagesimisoctauis: restituunt circunferētiam circuli, per primam huius secundi libri propositionem: partium quidem 240,

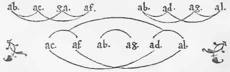
240, & *minutorum* 0,0,0,0, 16,43,4. *Et proinde quarta pars eiusdem circunferentiæ, quæ est a e, continebit partes* 60, & *minuta* 0,0,0, 0,4, 11, *ferè: quæ repræsentãt* $\frac{1}{15}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}$, & $\frac{11}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}$, & *ad simplicem fractionem reuocata, conficiunt* $\frac{1}{185880478}$ *unius integræ partis, quod animaduertatur (nedum obiiciatur) prorsus indignum nempe ex irrationalium segmentorum, radicúmue nõ quadratarum imperfecto calculo de necessitate procreatũ. Data igitur lineæ rectæ a b, datus est æqualis circunferentiæ quadrans a e. Quod facere oportebat.*

¶Idem aliter.

2 ¶POTERIT RVRSVM, EIDEM OBLATAE LI*neæ rectæ æqualis circunferentiæ quadrans, alia ratione designari. Resumatur ergo data linea recta a b: quæ per decimam primi elementorũ, bifariam diuidatur in puncto c. Et centro c, interuallo autem c a, semicirculus describatur a d b: cuius circunferentia bifariã diuisa sit in ipso puncto d, per 30 tertij eorundem elementorum. Inueniatur postmodũ linea recta, quæ sit æqualis quadrãti a d, uel d b, per antecedentẽ secundã propositionẽ: utpote a e, eidem semicirculo a d b, per primã quarti elemẽtorũ coaptata. & connectatur e b, linea recta. Angulus igitur a e b, rectus erit, per 31 tertij elementorũ. Recta consequenter a e, in continuũ di rectũmq; producatur, ad partes quidẽ e: & ipsi a b, lineæ datæ, æqualis secetur a f, per tertiam primi eorundẽ elementorum. Deinde per punctũ f, ipsi e b, parallela ducatur f g, per 31 ipsius primi elemẽtorũ. Rectus erit igitur angulus a f g, per 29 eiusdem primi elementorũ, & b a f, angulus*

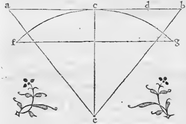


recto minor: conuenient propterea a b, & f g, in directum producta, per quintum postulatum geometricum. Conueniant igitur in punctum g: triangulum propterea a f g, erit rectangulum, & proinde in semicirculo constitutum, per ipsius 31 tertij elementorum cõuersionẽ. Diuidatur ergo a g, recta bifariam, in puncto h, per decimam primi eorundem elementorum. Et centro h, interuallo autẽ h a, uel h g, semicirculus describatur a f g: cuius circunferentia bifariam diuidatur in puncto l, per ipsam 30 tertij elementorum. ¶ His in hunc modum constructis, aio circunferentiæ quadrantem a l, aut l g, æqualem esse datæ a b, lineæ rectæ. *Triangula enim a e b, & a f g, sunt inuicem æquiangula: quoniam angulus qui ad a, utrique triangulo communis est, & is qui ad e, ei qui ad f, æqualis (nempe rectus recto) & proinde reliquus angulus a b e, æqualis reliquo a g f. Per quartã igitur sexti elemẽtorũ, erit ut b a, ad a e: sic g a, ad a f. Et permutatim igitur per 16 quinti eorundẽ elementorum, ut b a, dimetiens, ad dimetientem a g: sic a e recta, ad rectam a f. Sicut rursum dimetiens a b, ad circunferentiæ quadrantem a d: sic dimetiens a g, ad circunferentiæ quadrantem a l. Vt autem dimetiens a b, ad dimetientem a g: sic præostensa est a e, recta, ad rectam a f. Et sicut igitur per undecimã quinti elemẽtorum a e, recta, ad rectam a f, sic a d, quadrans ad quadrantem a l. Et permutatim denique, per eandem sedecimam quinti elementorum, ut a e, recta, ad quadrantem a d: sic a f, recta, ad quadrantem a l, sed a e recta, æqualis est quadranti a d, per ipsam constructionem: & recta igitur a f, & proinde a b, linea data, æqualis est quadranti a l. Date igitur lineæ rectæ a b, æqualem circunferentiæ quadrantem dedimus a l. Quod rursum oportuit fecisse.*



¶ Idem rursum aliter.

3 ¶ALIAM INSVPER VIAM EXCOGITAVIMVS, *eámque duplicem, qua data, linea recta, in circunferentiæ quadrantem promptißimè reuocatur. Sit igitur rurſum data linea recta a b: quæ bifariam in primis diuidatur, in puncto quidem c. Illius autē dimidia c b, proportionaliter diuidatur: cuius ſegmentum maius, unà cum unius nonæ partes eiuſdem ſegmenti maioris parte ſexageſima (quæ facit* $\frac{1}{540}$ *unius integri) eſto c d. Ipſi poſtmodum a d, æquales ſubtendantur a e, atque b e, ſeſe inuicem contingentes in ipſo puncto e: & connectatur c e, linea recta, quæ per 8 propoſitionem, & 10 diffinitionem primi elementorum, perpendicularis erit ſuper a b.* Centro igitur *e, interuallo autem e c, deſcribatur circuli quadrans f c g: quem per 16 tertÿ elementorum, tange ipſa a b, linea data.* Hunc *igitur circunferentię quadrantem, aio æqualem*

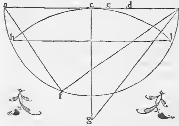


eſſe eidem a b, lineæ datæ. ¶ Qualium *enim partium (ut ſolita numerorum utamur deductione) circuli ſemidiameter eſt 60, talium circunferentiæ quadrans (quem habet repræſentare data a b linea recta) eſt 94, & minutorum 13,50,46,9,13, per antecedentem primã propoſitionem. Recta igitur c b, ipſius a b dimidia, erit partiũ 47 ſimiliũ, & minutorum 6,55,23,4,36,30: quorũ ſegmentũ maius proportionale, per ea quę numero 2 primę ꝑpoſitionis antecedẽtis libri primi ſunt annotata, erit partiũ 29, & minutorũ 7,8,4,21,44,30. Horũ autē pars nona, habet partes 3, & minuta 14,7,33,49,7: quæ diuiſa ꝑ 60, reuocãtur in minuta 3,14,7,33,49,7. Quæ iũcta pręſatis 29 partibus, & minutis 7, 8,4,21,44,30, ipſius ſegmẽti maioris, cõficiũt partes 29, & minuta 10, 22,11,55,33,23. Tanta eſt igitur linea c d: quæ unà cum a c, eidem a b æquali, cõficit rectam a c d, partium quidem 76, & minutorum 17,17,35. Totidē itaq; partium & minutorũ, eſt ipſa a e, uel e b: cuius quadratũ*

habet partes 5819, & minuta 53,31,42,59,10,25. A quibus ſubducto quadrato ipſius a c, quod eſt partium 2219, & minutorum 51,34,4,57,33,37: relinquitur quadratũ ipſius e c, per 47 primi elemẽtorũ (rectus eſt enim angulus a c e) partium uidelicet 3600, & minutorum 1,57,38,1,36,58: quorũ radix quadrata habet partes 60, & 1 ferè minutũ primũ, ex irrationaliũ ſegmentorum, ſurdarúmue radicũ ineuitabili defectu cõtractum, & proinde nihili faciendum. Recta *igitur e c, eſt partium 60: & quadrans propterea circunferentiæ f c g (uti ſupra diximus) erit ſimilium partium 94, & minutorum 13,50,46,9,13.* Atqui *totidem partium atque minutorum, ſuppoſita eſt a b, linea recta.* Quradrans *igitur circunferentiæ f c g, eidem a b, lineæ rectæ coæquatur: quod faciendum, atque numeris confirmandum ſuſceperamus.*

¶ Idem rurſum alio modo.

¶IVVAT ET ALIVM DEMVM, AD IDEM, SVB- 4
nectere modum. Reſumatur ergo data a b, linea recta, bifariam diuiſa in puncto c: & dimidia illius pars c b, diuiſa proportionaliter in puncto d, cuius ſegmentũ maius ſit b d, minus uerò d c: quod rurſum proportionaliter diuidatur in puncto e, ſitq; illius ſegmentũ maius d e, minus autẽ e c. Super data poſtmodũ a b, linea recta, deſcribatur ſemicirculus a f b: & ipſi a e, ſubtẽdatur æqualis a f, connectatúrq; f b, linea recta. Erecta *demum perpendiculari c g, eidem f b, æqualis ſubtendatur b g, coincidẽs in c g, perpendicularem ad ipſum punctũ g.* Erit *enim recta g c, ſemidiameter circuli, cuius circunferentiæ quadrans, ueluti h c l, eidem a b, lineæ rectæ eſt æqualis. Huiuſce autem traditionis fidem facit, cõueniẽs ad amuſsim ipſius c g, ſemidiametri, cum proxima deſcriptione magnitudo.*



¶ Corollarium.

¶ Ex supradictis fit manifestum, quàm facile sit, data quauis linea recta in circunferentiæ quadrantem in primis resoluta, oblatæ cuicunque lineæ rectę, æqualem circunferentiæ quadrantem, tãquam ex archetypo describere. Nam si eadem linea recta à principio data, posita fuerit in primo ordine: & semidiameter circuli, cuius circunferentiæ quadrans æquatur ipsi lineæ datæ, in secundo: tertium porrò locum possideat ipsa linea proposita, cui uidelicet quadrãs circunferẽtiæ desideratur æqualis: & per 12 sexti elemẽtorũ, quarta proportionalis inuentatur: ea erit diameter circuli, cuius circunferẽtiæ quadrans, eidem propositæ lineæ rectæ coæquatur. Sunt enim præfatæ lineæ, atque semidiatri, inuicem proportionales.

PROPOSITIO IIII.

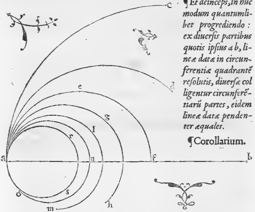
QVILIBET insuper lineæ rectæ, liberas quotcunque diuersarum circunferentiarum partes, à datis quibusuis numeris denominatas, integrámue circunferentiam æqualem delineare.

1 ¶ VT SI DATA FVERIT LINEA RECTA, AB: *illi in primis dabitur circunferentiæ quadrans æqualis, per antecedẽtem tertiam propositionem, cuiusmodi est arcus a c, eius quæ sequitur descri-*
2 *ptionis.* ¶ *Et si eadem a b, linea data, in tres partes inuicem æquales di uidatur, & duo illius tertia in circunferentiæ quadrantem resoluãtur per ipsam antecedentem tertiã propositionem: idem circunferentiæ quadrans, unà cum dimidia eius parte (ueluti arcus a d, eiusdem sequentis*
3 *descriptionis) eidem oblatæ lineæ rectæ coæquabitur.* ¶ *Item si dimidiæ parti eiusdem a b, lineæ datæ, per antecedentem tertiam propositionem quadrans æqualis describatur, isq; geminetur, hoc est, compleatur semicirculus: erit ipsa dimidia circunferentia (cuiusmodi est a e f) æqualis ipsi a b, lineæ datæ.* ¶ *Præterea, si præfata linea data in quinque partes*
4 *inuicem æquales diuidatur, & duo illius quinta in circunferentiæ quadrantem, per ipsam antecedentem propositionem tertiam resoluantur: gemini quadrantes, & dimidium quadrantis eiusdem circunferentiæ (quos repræsentat arcus a l m) ipsi toti lineæ datæ a b erunt æquales.*
5 ¶ *Quòd si eadem linea data, in septem partes inuicem æquales fuerit distributa, & duobus illius septimis æqualis circunferentiæ quadrans,*

per eandem tertiam propositionem describatur: tres huiuscemodi quadrantes, unà cum ipsius quadrantis dimidio (cuiusmodi est arcus a n o, subscriptæ delineationis) coæquabuntur eidem a b, lineæ datæ.

¶ *Consequenter, ubi quartæ parti eiusdē lineæ datæ, circunferētiæ quadrans descriptus fuerit æqualis, per sæpius allegatam propositionem tertiam: erit idem quadrans quater sumptus, hoc est, integra circunferentia (qualis est arcus a r s) eidem lineæ datæ ad amussim æqualis.* 6

¶ *Et deinceps, in hūc modum quantumlibet progrediendo: ex diuersis partibus quotis ipsius a b, lineæ datæ in circunferentiæ quadrantē resolutis, diuersæ colligentur circunferētiarū partes, eidem lineæ datæ pendenter æquales.* 7



¶ Corollarium.

¶ *Et proinde fit manifestum, dari posse diuersarum circunferentiarum arcus, tum inuicem, tum integris circunferentiis æquales. Per ea etenim quæ nunc expressa sunt, arcus a c, a d, a e f, a g h, a l m, a n o, atque integra circunferentia a r s (quorum diuersitas est euidētissima) eidem a b, lineæ datæ sunt æquales: & proinde æquales adinuicem.*

¶ Incidens notandum.

¶ *Qualiter autem data linea recta, in quotcunque partes inuicem æquales diuidatur: alibi sufficienter edocuimus.* Id etiam ex nona sexti elementorum, uel facilè colligitur: Docet enim à quauis linea recta

ordi-

ordinatam partem, hoc est, à dato quouis numero denominatã abscindere. Hinc per tertiam primi eorundem elementorum, residua pars ipsius lineæ datæ, in reliquas partes similes tandem subdiuidi poterit: donec oblatus earundem partium absoluatur numerus.

PROPOSITIO V.

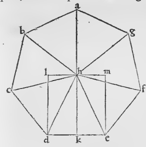
QVA ratione circulus sub dimensionem cadat, illiúsue colligatur area, pendenter reddere certum.

1 ¶CVM AREA DATAE CVIVSLIBET REGVLA*ris atque multilateræ figuræ, sit æqualis parallelogrammo rectangulo, quod sub perpendiculari quæ ex centro inscripti aut circunscripti circuli, in latus ipsius multilateræ figuræ cadit, & dimidio eiusdẽ multilateræ continetur ambitu: fit consequenter, ut comprehensum sub dimidia circunferentia, & ea quæ ex centro circuli parallelogrãmum rectangulũ, areæ ipsius circuli sit æquale. Circulus enim omnium regularium, & intra eundem orbicularem ambitum descriptarum multilaterarũ figurarum, maxima atq; capacissima uidetur esse figura: utpote, intra cuius circunferentiam, singula datæ cuiuslibet multilateræ figuræ coincidant latera, per secundam tertij elementorum. Circuli nanque circunferẽtia, ex infinitis, atque inuicem cõfusis uidetur resultare lateribus: numerus siquidem laterum regularium figurarum, quæ in eodem possunt describi circulo, in infinitum progreditur. Hinc fit, ut semidiameter circuli, in singula latera illius circunferentiam constituentia (quæ sunt omnium minima) indifferenter coincidere uideatur: & proinde contentũ sub dimidia circunferentia, & ea quæ ex centro parallelogrammũ rectangulum, areæ ipsius circuli de necessitate coæquatur. Cum enim illud de minima, atque intermediis omnibus multilateris & regularibus figuris ue rificetur: necessum est consequenter, idem habere uerum de ipso circulo, omnium multilaterarum, & intra eundem orbicularẽ ambitum (uti supra dictum est) descriptarum maximo atque regularissimo.*

¶ Assumptum, de multilaterarum atque regularium figurarum dimensione.

2 ¶QVOD AVTEM RECTANGVLVM SVB PRAEFATA

perpendiculari, & dimidio cuiuslibet multilateræ regularis ambitu cōprehensum, aream habeat ipsi multilateræ figuræ æqualem: in hunc modum cōfirmatur. Sit clarioris intelligentiæ gratia, datū heptagonū æquilaterū & æquiangulū a b c d e f g, cuius cētrū sit h: à quo in singulos angulos ipsius heptagoni, rectæ ducantur lineæ h a, h b, h c, h d, h e, h f, h g, idem heptagonum in septem isoscelia & inuicem æqualia triangula diuidentes. In latus porrò d e, perpendicularis incidat h k: sitque sub eadem perpendiculari h k, & ipso latere d e, contentum rectangulū parallelogrammum d l m e. Constat igitur, per 41 primi elementorū, ipsum d l m e, rectangulū duplum esse trianguli d h e: sunt enim in eadem basi d e, atq; in eisdem parallelis d e, & l m, cōsistentia. Quod igitur sub h k perpendiculari, & latere d e cōtinetur rectangulū, duplum est ipsius trianguli d h e. Haud aliter concludemus, quod sub præfata perpēdiculari h k, & quolibet eiusdē heptagoni latere continetur rectangulū, duplum esse trianguli quod super codē latere ad centrum h constituitur. Quotuplex est autē unum prædictorum rectangulorū unius trianguli, utpote

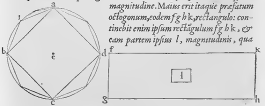


d l m e, ipsius d h e: totuplicia sunt & omnium triangulorum omnia rectangula, per primā quinti elementorum. Quæ igitur sub h k, perpēdiculari, & omnibus eiusdem heptagoni lateribus continentur rectangula, dupla sunt omnium triangulorum, super eisdem lateribus ad centrum h, consistentium: & ipsius propterea heptagoni dupla, utpote, quòd ex eisdem resultet triangulis. Rectangulum itaque parallelogrammum, sub h k, perpendiculari, & dimidio laterum ambitu comprehensum, æquum est areæ ipsius heptagoni a b c d e f g. quod fuerat ostendendum. De cæteris quibuscūq; regularibus, & in infinitum progredientibus figuris multilateris, siue polygonis, haud alienum habendū est iudicium. Area itaque circuli, & dati cuiuslibet polygoni regularis, eadem uia colligitur.

¶Quòd

¶ Quòd circulus non est maior rectangulo, sub dimidia circunferentia, & semidiametro comprehenso.

3 ¶ EANDEM QVOQVE CIRCVLI DIMENSIONEM, *ab impoßibili confirmare licebit. Sit igitur datus circulus a b c d, cuius centrum e: rectangulũ uerò sub dimidia illius circunferentia, & ea quæ ex centro contentum, f g h k. Itaque si a b c d circulus, ipsi rectangulo f g h k, non fuerit æqualis: erit igitur uel eo maior, aut minor. Sit in primis (si poßibile fuerit) maior: & excessus eiusdem circuli, super ipsum rectangulum, magnitudo l. Erit igitur magnitudo l, eodem circulo a b c d, minor. Auferatur itaque à circulo a b c d, maius quàm dimidium, & à residuo maius quàm dimidium, & sic deinceps: quatenus id quod relinquetur, fit maius ipsa l magnitudine. Id autem fiet, tollendo in primis quadratum a b c d, in dato circulo per sextam quinti elemẽtorum descriptum: illud enim dimidium est quadrati eidem circulo circũscripti, & proinde maius quàm dimidiũ ipsius circuli. Deinde, à relictis quatuor circuli sectionibus, quatuor isoscelia & inuicem æqualia auferendo triangula, à limitibus cuiuslibet lateris in medium punctum subtensi arcus insurgentia (cuiusmodi est triangulum a i b) erit unũquodq; triangulum, dimidium parallelogrammi, quod sub eisdem lateribus & sagittis sectionum cõprehenditur, & proinde ipsius sectionis dimidio maius. Sint igitur (uerbi gratia) octo circuli sectiones, super latera octogoni æquilateri & æquianguli, in eodem circulo descripti, minores ipsa l, magnitudine. Maius erit itaque præfatum octogonum, eodem f g h k, rectangulo: continebit enim ipsum rectãgulum f g h k, & eam partem ipsius l, magnitudinis, quã*



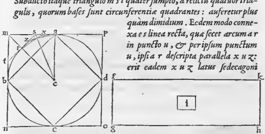
præfatæ octo sectiones, eadem l magnitudine sunt minores. Verùm si ex centro e, in unum ipsius octogoni latus perpendicularis intelligatur: contentum sub ipsa perpendiculari, & dimidio laterum ambitu rectã-

gulum, eidem octogono, per antecedentis lẽmatis demonstrationem, erit æquale. Atqui perpendicularis ipsa minor est circuli semidiametro, & dimidius laterum ambitus ipsius octogoni, dimidia circũferentia itidem minor: idem propterea octogonum, sub eadem perpendiculari, & dimidio laterum ambitu comprehensum, minus erit eodem f g h k, rectangulo, quod sub circuli dimidia circunferentia & illius semidiametro continetur. Sequebatur autem ex præmissis, quod & maius: quæ simul impossibilia sunt. Non est igitur circulus a b c d, ipso f g h k, rectangulo maior.

¶ Quòd circulus non est minor ipso rectangulo, quod sub dimidia circunferentia & semidiametro continetur.

¶AIO CONSEQVENTER, QVOD NEQVE MI- 4
nor est circulus eodem rectangulo sub dimidia circunferentia & semidiametro comprehenso. Sit enim rursum (si possibile fuerit) differentia ipsius a b c d circuli, atque rectanguli f g h k, præfata magnitudo l. Et eidem circulo a b c d, circunscribatur quadratum m n o p, ipsius inscripti quadrati contingens angulos, per septimam quinti elemẽtorum. Ipsum ergo quadratum m n o p, eodem rectangulo f g h k, maius erit. Nam per antecedentem primam propositionem huius secundi libri, qualium partium diameter circuli est 120, talium dimidia circunferentia est 188, & minutorum 27, 41, 32, 18, 26: quæ ducta in 60, partes diametri, producunt partes 11307, & minuta 41, 32, 18, 26. Quadratum autem circunscriptum, ex circuli diametro in seipsum ducto procreatum, habet partes 14400. Auferatur igitur ex eodem circũscripto quadrato maius quàm dimidium, & à residuo maius quàm dimidium, & sic deinceps: donec ipsum residuum, minus sit eadem l magnitudine. Id autem fiet, si in primis auferatur circulus a b c d: qui maior est inscripto quadrato, quod ipsius circunscripti clarum est esse dimidium. Deinde à reliquis quatuor triangulis, quorum bases sunt ipsius circuli quadrantes, auferatur maius quàm dimidium: in hunc qui sequitur modũ. Connectatur e a, circuli semidiameter, in latus m p, circunscripti quadrati perpendicularis: postea e m eiusdem circunscripti quadrati semidiameter, qui circunferentiæ quadrantem a b, secet in puncto r. Et per punctum

punctum r, ipsi a b lateri parallela ducatur s r t, per 31 primi elementorum. Recti erunt igitur anguli qui circa uerticem r, per 29 & 15 ipsius primi elementorum. Tanget itaque recta s t ipsum a b c d circulum, in ipso quidem puncto r, per corollarium sedecimæ tertij eorundem elementorum. Connexa tandem a r, quæ est latus octogoni regularis in dato circulo descripti: eadem s t erit latus octogoni regularis, descripti circa eundem circulum a b c d: & r s æqualis ipsi a s, per ea quæ 12 quarti elementorum demonstrantur. Et cùm angulus m r s, sit rectus: maior erit m s, ipsa r s, per 19 primi elementorum: & proinde maior eadem s a. Triangula porrò m r s & s r a, se habent adinuicem, ut bases m s & s a, per primam sexti elementorum. Maius est itaque triangulum m r s, ipso rectilineo triangulo r s a: & proinde longè maius triangulo r s a, cuius basis est arcus a r. Et totum consequenter triangulum m s t, maius erit duobus triangulis r s a, r t b, quorum bases sunt arcus a r, r b. Subducto itaque triangulo m s t quater sumpto, à relictis quatuor triãgulis, quorum bases sunt circunferentiæ quadrantes: aufferetur plus quàm dimidium. Eodem modo connexa e s linea recta, quæ secet arcum a r in puncto u, & per ipsum punctum u, ipsi a r descripta parallela x u z: erit eadem x u z latus sedecagoni



eidem circulo a b c d circunscripti, & triangulum s x z maius reliquis duobus triangulis a x u, u z r, quorum bases sunt arcus a u & u r. Subducto itaque triangulo s u z octies sumpto, aufferetur ab octo residuis triangulis, ipsi a s r u triangulo similibus & inuicem æqualibus, plus quàm dimidium. Et deinceps in hunc modum, de cæteris agendo triangulis, atque regularibus polygonis eidem circulo circunscriptis, & à pariter paribus numeris denominatis. Supponantur igitur, facilioris intelligentiæ causa, octo triangulares superficies, inter ipsum circulum & circũscriptũ polygonũ regulare cõprehensæ, ipsa l magnitudine fore minores. Erit igitur idem octogonum, præfato rectangulo f g h k

minus: cùm datum a b c d triangulum, & residuum ipsa l magnitudine minus comprehendat. At quoniam dimidius ambitus ipsius octogoni circunscripti, maior est dimidia circunferentia circuli, & perpendicularis in latus eiusdem cadens octogoni, semidiametro eiusdem circuli æqualis, atque per antecedentis assumpti siue lemmatis demonstrationem, sub ipsa perpendiculari & dimidio laterum ambitu, rectangulum comprehendatur ipsi octogono æquale: Maius erit propterea idem circũscriptum octogonũ, ipso f g h k rectangulo, sub dimidia circũferentia & semidiametro comprehenso. Inferebatur autem ex supradictis, quò & minus: quæ simul stare non possunt. Non est igitur circulus a b c d, eodem f g h k rectangulo minor. Ostensum etiam, quòd neque maior. Aequalis est igitur idem circulus a b c d, ipsi rectangulo f g h k, quod sub dimidia circunferentia, & semidiametro continetur.

¶Conclusio propositionis.

¶Resultat igitur area circuli, ex ductu semidiametri in dimidiam circunferentiam. Quod demonstrandum susceperamus.

¶Corollarium.

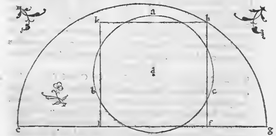
¶Ex hac igitur quinta, & prima huius libri propositione fit manifestum, qualium partium area circuli est 11307, & minutorum 41,32,18, 26: talium partium circunscriptum quadratum esse 14400, inscriptum uero 7200.

PROPOSITIO VI.

Circulo dato, æquale quadratum, ex præostensa ratione circunferentiæ ad ipsius circuli diametrum atque uersione quadrantis in lineam rectam, in primis describere.

¶PRIMA ET OMNIVM SIMPLICISSIMA *circuli quadratura, ex præostensa ratione circunferentiæ ad diametrũ, & ipsius circuli dimensione, in succedentiũ tetragonismorum circularium confirmationem, in hunc qui sequitur modum uenit in primis colligenda. Constat igitur ex prima huius secundi libri propositione, circunferentiam* 1

cunferentiam circuli, ad ipsum diametrum rationem obtinere triplam undecupartientem septuagesimas octauas: qualem propemodum habere uidentur partes 376, & sexagenaria minuta 55, 23, 4, 36, 52, ad partes 120 (qua ratione præcisiorem aliquando inueniri posse, omnino diffidimus: quemadmodum ex ipsius primæ propositionis demonstratione fit manifestum.) Ex immediata porrò quinta propositione colligitur, *rectangulum sub dimidia circunferentia, & semidiametro comprehensum, æquum esse dato circulo: cuius radix quadrata, est latus quadrati quod eidem circulo coæquatur.* Si igitur inter *rectam quæ dimidiæ circunferentiæ sit æqualis, & ipsius circuli semidiametrum, media proportionalis inueniatur, per 13 sexti elementorum: ea erit latus quadrati, ipsi dato circulo æqualis. Cùm enim tres lineæ rectæ fuerint proportionales, quod sub extremis continetur rectangulum, æquum est ei quod à media fit quadrato, per 17 eiusdem sexti elementorum.* ¶ *Vt si datus fuerit (uerbi gratia) circulus a b c, cuius centrum d, & dimidiæ illius circunferentiæ æqualis sit e f linea recta, semidiametro autem recta f g, & super tota e g linea recta semicirculus describatur e h g, excitetur que à puncto f perpendicularis f h, per undecimam primi elementorum: erit ipsa f h media proportionalis inter a f & f g, per ipsam 13 sexti elementorum, & descriptum ex eadem f h quadratum f h k l, eidem circulo a b c d pendenter æquale.*



¶ *Si iuuet autem in numeris facere periculum, assumatur circuli diameter partium inuicem æqualium 120 (qualem secunda huius libri pro-*

positione suppositimus) semidiameter igitur, erit partium 60: & triplũ consequenter ipsius diametri, partium 360. Vnum porrò septuagesimumoctauum eiusdem diametri, habebit partem 1, & minuta sexagenaria 32,18,27,41,32: & proinde undecim septuagesimaoctaua, continebunt partes 16, & minuta 55,23,4,36,52. Hæc autem undecim septuagesimaoctaua, iuncta præfatis 360 partibus triplati dimetientis conficiunt circunferentiam ipsius circuli, partium quidem 376, & minutorum 55,23,4,36,52. Dimidia itaque circunferẽtia, erit partium 188, & minutorum 27,41,32,18,26: quæ ducta in 60, partes semidiametri, reddunt partes 11307, & minuta 41,32,18, 26. Tanta est igitur area ipsius circuli, per antecedentem quintam propositionem. Huius autem

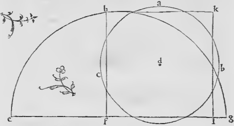
	partes.	m̃.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.
Diameter circuli.	120	0	0	0	0	0
Semidiameter.	60	0	0	0	0	0
Triplum diametri.	360	0	0	0	0	0
$\frac{1}{78}$ *ipsius diametri.*	1	32	18	27	41	32
$\frac{11}{78}$ *eiusdem diametri.*	16	55	23	4	36	52
circunferentia.	376	55	23	4	36	52
Dimidia circunferentia.	188	27	41	32	18	26
Semidiameter, per quem dimidia	60	/	/	/	/	/
circunferentia multiplicatur.	27	41	32	18	26	0
Numeri producti.	11280					
¶ *Area dati circuli.*	11307	41	32	18	26	0
Latus quadrati circulo æqualis.	106	20	15	28	50	0
Dimidium ipsius lateris.	53	10	7	44	25	0
Semidiameter ipsius quadrati.	75	11	31	25	30	35

areę radix quadrata, uero (quantum ars ipsa patitur numerorum) proxima, habet partes 106, & minuta 20, 15, 28, 50. Tãtum est itaque latus quadrati, eidẽ circulo æqualis: & ipsius propterea lateris dimidium, habebit partes 53, & minuta 10,7, 44, 25. Eiusdem porrò quadrati semidiameter, erit partium 75, & minutorum 11,31,25,20,35. Vt obiecta prædictarum supputationũ ostendit formula.

¶ Idem aliter.

¶ EIDEM INSVPER OBLATO CIRCVLO, AE- 2
quale quadratum aliter dabitur: mediante uidelicet recta, quę circũferentię quadranti, per antecedentẽ secundam propositionem designata est æqualis. Nam si inter candẽ rectam, & circuli diametrum, media proportionalis inueniatur, per 13 sexti elemẽtorũ: ea rursum erit latus quadrati, quod ipsi dato circulo est æquale. Id enim quod sub dimidia circũferentia, & semidiametro continetur rectangulũ, ipsi dato circulo est æquale: igitur & illud q̃ sub quadrãte, & toto cõprehenditur diametro.

¶ *In exemplarem huiuſce partis confirmationē, deſcribatur figura priori haud diſsimilis: hoc ſolùm excepto, quòd recta e f, quadranti circunferentiæ ſit æqualis, f g autem dati a b c d, circuli diametro. Sitque rurſum media proportionalis inter e f, & f g, recta f h: cuius quadratum f h k l, æquum eſt contento ſub e f, & f g rectangulo, & proinde ipſi dato circulo a b c d.*



¶ *Si iuuet autem, numerali ſupputatione periculum facere: ſit uelut antea, circuli diameter partium 120. Erit igitur recta e f, quæ ipſi uidelicet circunferentiæ quadranti eſt æqualis, ſimilium partium 94, & minutorum 13, 50, 46, 9, 13. per antecedentem primam, aut ſecundam propoſitionem: quæ ducta in 120 partes ipſius f g, ſeu diametri circuli, procreāt rurſum partes 11307, & minuta 41, 32, 18, 26: quanta uidelicet per antecedentem primam partem, inuenta eſt area ipſius dati circuli. Hinc latus quadrati eidem circulo æqualis, hoc eſt, recta f h, atque ipſius quadrati ſemidiameter, à præmiſſa quantitate non diſcrepabunt.*

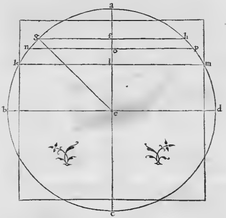
PROPOSITIO VII.

DATO rurſum circulo, inuenire latus quadrati eidē circulo æqualis: & rectam ſimul, quæ quadranti circunferentiæ ipſius coæquetur circuli.

1 ¶ QVANQVAM CIRCVLVM IN QVADRATVM *æquale, & tum ex præoſtenſa ratione circūferētiæ ad ipſius circuli diametrū, tum ex uerſione quadrātis eiuſdem circunferentiæ in lineā rectā, proxima docuerimus reuocare propoſitione: iuuat nihilominus hoc præ-*

clarum & hactenus desideratum problema, pluribus modis à nobis recēs excogitatis & adinuentis, hoc loco pertractare: idque in primis beneficio duarum rectarum, inter datas extremas continuè proportionalium. Sit igitur datus circulus a b c d, cuius centrum e, in quo dimetientes a c, & b d, ad rectos sese inuicem diuidant angulos. Et discindatur diameter b e d, in tot segmenta proportionalia, & eodem ordine distributa, ut in prima parte antecedentis secundæ propositionis declaratum, atque obseruatum extitit. Tripletur postmodum segmentum proportionale ipsius diametri, ordine quintum: & à consurgente linea recta, secetur dimidium segmenti duodecimi: & quinta pars decimioctaui segmenti, atque sexagesima pars unius centesimæ uigesimæoctauæ partis ipsius segmenti decimioctaui, necnon pars sexagesima unius partis sexagesimæ centesimæ sexagesimæ partis, & par insuper sexagesima unius sexagesimæ partis alterius partis sexagesimæ unius octuagesimæ partis eiusdem decimioctaui segmenti: unà cum parte sexagesima unius sexagesimæ partis alterius partis sexagesimæ, quæ rursum partem sexagesimam efficiat unius quadragesimæoctauæ partis segmenti proportionalis ordine decimiseptimi. Et ei quæ tandem relinquetur lineæ rectæ, æqualis secetur e f, per tertiam primi elementorum. Aut (si uelis) ex quarto segmento proportionali ipsius diametri b e d, auferatur segmentum ordine undecimum: & inde relictæ lineæ rectæ, addatur par quinta decimioctaui segmenti, unà cum nuper expressis fragmentis ipsius decimioctaui atque decimiseptimi segmenti proportionalis eiusdem diametri. Et inde resultanti lineæ rectæ, æqualis secetur a f. Per punctum insuper f, altero duorum modorum designato, ipsi dimetienti b e d, parallela ducatur g f h, per 31 primi elementorum, utrinque suos applicans limites in circunferentiam a b c d. Inter ipsum consequenter b e d, dimetientem, & rectam g f h, duæ lineæ rectæ sub eadem ratione continuè proportionales inueniantur, per aliquam antecedentiu primi libri propositionem: quarum maior & ordine secunda sit k l m, minor uerò siue tertia proportionalis n o p. His in hunc modum constructis, aio rectam k l m, esse latus quadrati, quod ipsi dato circulo est æquale: rectam porrò n o p, æqualem esse quadranti circunferentiæ eiusdem circuli dati, utpote ipsi a b, uel a d. Quod numerorum officio, in hunc qui sequitur modum, fiet manifestum.

¶Resu-



¶ *Resumantur igitur ex secunda huius libri propositione, segmentorum proportionalium ipsius diametri b e d supputatæ, & in numeralem tabellam redactæ quantitates, in partibus uidelicet qualium idem circuli diameter est* 120: *Et cōnectatur e g, semidiameter. Clarum est itaq; segmentum proportionale ordine quintum triplatum, efficere partes* 43, & *minuta* 16,53,39,46, 4,40 . *Dimidium porrò segmēti duodecimi, sub his continetur minutis,*11,10,48,50,7,12 . *Et pars quinta decimioctaui segmenti, habet minuta* 0,14,57,11,45,0,48. *Centesima deinde uigesimaoctaua pars ipsius decimioctaui segmenti, hæc minuta comprehendit,* 0, 0,35,2,48,9,52,30: *quorum pars sexagesima eisdem exprimitur numeris, sed mutatis sedibus per unicum ordinē uersus dextram, in hūc modū,* 0,0,0,35,2,48,9,52,30. *Eiusdē præterea decimioctaui segmenti pars centesima sexagesima, sub his cōprehēditur minutis* 0,0,28,2,14,35,54: *quę bis per* 60 *solito more distributa, uertuntur in minuta* 0 , 0,0,0,28, 2, 14, 35,54 . *Ipsius præterea segmenti decimioctaui pars octuagesima, est minutorum* 0,0,56,4,29,4 : *quæ ter per* 60, *dextram uersus distribu-*

ta,reuocantur in minuta 0,0,0,0,0,56,4,29,4. *Pars tandem quadragesimaoctaua segmenti decimiseptimi,hæc complectitur minuta*, 0, 2,31,13,5:*quæ si per quatuor sexagenarios ordines dextram uersus reuocentur,uertentur in minuta*,0,0,0,0,0,2,31,13,5.*Hæc autem omnia in unum collecta numerorū ordinē,efficiūt minuta* 11,25,46,37,24,1,48, 10,33:*quæ subducta à præfatis partibus* 43,*&* *minutis* 19,53,39,46,4, 40, *ipsius quinti segmē-ti tripli cati,relinquūt partes* 43,*&* *minuta*

	ptes.	m̄.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Triplū quīti segmēti.	43	16	53	39	46	4	40	0	0	0
$\frac{1}{2}$ *segmenti* xv.	0	11	10	48	50	7	12	0	0	0
$\frac{1}{5}$ *segmenti* xviij.	0	0	14	57	11	45	0	48	0	0
$\frac{1}{60}\frac{1}{128}$ xviij.	0	0	0	0	35	2	48	9	52	30
$\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{160}$ xviij.	0	0	0	0	0	28	2	14	35	54
$\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{80}$ xviij.	0	0	0	0	0	0	56	4	29	4
$\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{48}$ xvij.	0	0	0	0	0	0	2	31	13	5
Horum summa.	0	11	25	46	37	24	1	48	10	33
Recta e f.	43	5	27	53	8	40	38	11	49	27

5,27,53,8,40,38,*unà cum* 12 *propemodum minutis septimis,citra calculi iacturam reiiciendis,utpote quæ ad summum faciant* $\frac{1}{3732480000000}$. *Recta igitur e f,est partium* 43,*&* *minutorum* 5,27,53,8,40,38. *Quam rursum hoc modo colligere licebit. Segmentum proportionale diametri ordine quartū,habet partes* 17,*&* *minuta* 30,27,57,2,5,18: *&* *segmētum undecimum,minuta* 36,10,47,58,2,46. *Quibus detractis ex præfato segmēto quarto,relinquūtur partes* 16,*&* *minuta* 54,17,9,4,2,32. His *autem si addantur præfata* , *&* *singulatim expressa decimioctaui, atque decimiseptimi segmēti fragmenta:consurgēt partes* 16, *&* *minuta* 54, 32,6,51,19, 21,48,10, 33. *Tāta est*

	ptes.	m̄.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Segmentum iiij.	17	30	27	57	2	5	18	0	0	0
Segmentum xi.	0	36	10	47	58	2	46	0	0	0
Residuum.	16	54	17	9	4	2	32	0	0	0
$\frac{1}{5}$ *segmenti* xviij.	0	0	14	57	11	45	0	48	0	0
$\frac{1}{60}\frac{1}{128}$ *segmēti* xviij.	0	0	0	0	35	2	48	9	52	30
$\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{160}$ xviij.	0	0	0	0	0	28	2	14	35	54
$\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{80}$ xviij	0	0	0	0	0	0	56	4	29	4
$\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{48}$ xvij.	0	0	0	0	0	0	2	31	13	5
Horum summa a f.	16	54	32	6	51	19	21	48	10	33
Reliqua f e, seu e f.	43	5	27	53	8	40	38	11	49	27

igitur recta a f:quæ subducta ex a e semidiametro , *relinquit e f, partiū* 43,*&* *minutorū* 5,27,58,8,40,38.*Cuius quadratū habet partes* 1856,*et minuta*

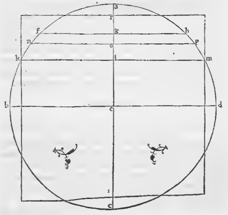
minuta 50,28,2,15,,18,7,15,14,25,39,4,4. Quadratũ porrò ſemidiametri e g, eſt partiũ 3600: à qbus ſi auferatur idẽ quadratũ quod fit ex e f, relinquetur quadratum ipſius f g, per 47 primi elementorum, partium quidem 1743, & minutorum 9,31, 57,44,41,52,44,45,34,20,55,56. Quorum radix quadrata, habet partes 41, & minuta 45,4,9,18,39,6: tanta eſt igitur recta f g. Hac autem ducta in 60 partes ipſius b e ſemidiametri, & productum iterum multiplicatum per eaſdem 60 partes, efficiunt partes 150304, & minuta 9,18,39,6: quorum radix cubica, eſt partium 53, & minutorum 10,7,44,25. Tanta eſt itaque recta k l, per nonam propoſitionem antecedentis libri primi. Et proinde tota k l m, habet partes 106, & minuta 20,15,28,50: quantum uidelicet per antecedentem propoſitionem ſextam inuentum fuit latus quadrati ipſi dato circulo æqualis, cuius diameter eſt partium 120. Dato itaque circulo *a b c d, datum eſt latus quadrati eidem circulo æqualis: quod in primis faciendum fuerat.* ¶ *Quòd autem recta n o p, ſit æqualis quadranti circunferentiæ a b uel a d, fit aquè manifeſtum. Nam ſi partes 53, & minuta 10,7,44,25, ipſius k l, ducantur in partes 41, & minuta 45, 4,9,18,39,6, ipſius g f, producentur partes 2219, & minuta 51,34,4, 57,33,33,7,8,41,30: quorum radix quadrata habet partes 47, & minuta 6,55,23,4,36,30, ferè. Tanta eſt igitur recta n o, per 20 ſeptimi elementorum: & tota proinde n o p, erit partium 94, & minutorum 13, 50,46,9,13: quanta uidelicet inuenta eſt recta æqualis quadranti circunferentiæ, cuius diameter eſt partium 120, per antecedentem ſextam propoſitionem. Dato propterea circunferentiæ quadrante, datur recta n o p eidem quadranti æqualis: quod feciſſe conſequenter oportuit.*

¶ Idem aliter.

2 ¶POTERIT ET VTRAQVE PARS HVIVSCE *propoſitionis, uia chordarum et arcuum, rectarúmue in circulo ſubtẽſarum, ad eandem oſtenſionis præciſionem uel facilè reuocari. Reſumatur ergo datus circulus a b c d, cuius centrum e, dimetientes uerò a c & b d, in eodem centro e ſeſe orthogonaliter interſecantes. In quo quidẽ circulo, coaſſumatur arcus a f graduum 44 (qualium uidelicet tota circunferentia eſt 360) & minutorum ſexagenariorum 5,42,52,24,52,8. Cuius quidem arcus a f, ſinus rectus ſit f g: & tota proinde chorda, ſub-*

i

tendens arcum duplum, esto recta f g h. Inter ipsum postea dimetientem b e d, & chordam siue rectam f g h, duæ lineæ rectæ sub eadem ratione continuè proportionales inueniantur, per quam libuerit ipsius antecedentis primi libri propositionem. Quarum maior & ordine secunda, sit rursum k l m*: minor uerò, siue tertia proportionalis, n o p. His ita constructis, aio rursum eandem* k l m *esse latus quadrati ipsi dato circulo æqualis: rectam uerò n o p, æqualem esse quadranti a b ipsius datæ circunferentiæ a b c d.* ¶ Per ea etenim, *quæ de rectis in circulo subtensis conscripsimus, & nostram sinuum rectorum tabulam minutim fideliterque supputatam, sinus rectus f g ipsius propositi arcus a f, habet partes 41 (qualium semidiameter est 60) & minuta 45,4,9,18, 39, 6: quantam uidelicet proximo calculo offendimus ipsam g f. Et quoniam semidiameter b e supponitur partium 60, erit rursum* k l *partium 53, & minutorum 10,7,44,25: recta uerò n o similium partium 47, & minutorum 6,55,23,4,36,30. Cùm enim extrema sint eadem quæ priùs: & ipsa media proportionalia* k l *& n o, à priùs inuenta partium & minutorum*



nutorum quantitate non discrepabunt. Tota igitur k l m, *erit rursum partium* 106, *&* *minutorum* 20, 15, 28, 50 : *Recta uerò* n o p *similium partium* 94, *&* *minutorum* 13, 50, 46, 9, 13. *Et proinde recta* k l m, *est latus quadrati ipsi dato circulo æqualis, ipsa uerò* n o p, *æqualis quadrāti circunferentiæ eiusdem circuli, per ea quæ nuper deducta sunt, & antecedenti sexta propositione confirmata. Vtraque igitur pars huiusce propositionis, fit rursum euidentissima.*

¶ Idem rursum aliter.

3 ¶ IDEM QVOQVE LATVS QVADRATI DAto *circulo æqualis, utpote* k l m *obtinebitur : si arcus à* k *sumptus fuerit graduum* 62 (*qualium, uelim intelligas, tota circunferentia est* 360) *& minutorum sexagenariorum* 23, 25, 28, 50. *Quoniam huiuscemodi arcus sinus rectus* k l, *per nostram de rectis in circulo subtensis traditionem, est partium* 53 *& minutorum* 10, 7, 44, 25 : *quæ duplata, efficiunt partes* 106, *& minuta* 20, 15, 28, 50 : *quantum uidelicet nuper inuentum fuit idem latus* k l m. ¶ *Et si coassumptus fuerit arcus* a n *graduum* 51, *& minutorum* 44, 40, 35, 30, 10, *sinus rectus* n o *ipsius arcus* a n, *ex præallegato sinuum rectorum calculo, constat partibus* 47, *& minutis* 6, 55, 23, 4, 36, 30 : *quæ duplata, conficiunt totam* n o p *quadranti æqualem, partium* 94, *& minutorum* 13, 50, 46, 9, 13. *Quàm facilis igitur, & methodica sit utriusque harum duarum rectarum adinuentio, cuilibet dextro lectori relinquimus diiudicandum.* ¶ *Chorda itaque arcus* 124 *graduum, & minutorum* 46, 50, 57, 40, *est latus quadrati ipsi dato circulo æqualis : quæ autem subtendit arcum* 103 *graduum, & minutorum* 29, 21, 11, 0, 20, *quadranti circunferentiæ eiusdem circuli coæquatur. Hinc fit, ut ex unaquaque harum trium partium, quemadmodum ex proxima colligitur propositione, gemina suboriatur circuli quadratura. Nam si ex recta* k l m *uno trium modorum adinuenta, describatur quadratum* r k m s, *illud erit æquale dato circulo* a b c d. *Aut si inter dimetientem* b e d *& rectam* n o p, *media proportionalis eliciatur: ea erit latus quadrati, quod eidem æquatur circulo.*

PROPOSITIO VIII.

Irculo iterum dato, latus quadrati eidem circulo æqualis, ex segmentis proportionalibus ipsius colligere diametri.

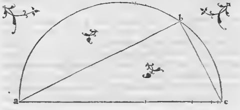
¶IN PRIMIS IDEM QVADRATI LATVS, 1
per solam proportionalium segmentorum dimetientis ipsius circuli elicietur compositionem. Nam si primo & maiori segmento, iungatur tertium, unà cum dimidio sexti, atque dimidio segmenti decimi, necnon & quarta parte segmenti ordine sedecimi, & parte sexagesima dimidij segmenti desimiseptimi, atque centesimæ nonagesimæsecundæ partis decimioctaui segmenti parte sexagesima, & parte demum sexagesima alterius sexagesimæ unius nonagesimæsextæ partis eiusdem segmenti decimioctaui : conflabitur tandem recta quædam linea, cuius quadratum æquum est ipsi dato circulo. ¶ Re*sumatur enim ob oculos, tabella segmentorum proportionalium ipsius dimetientis, quam in demonstrationem antecedentis secundæ propositionis supputauimus: ne sufficienter expressam ipsius dimetientis partitionem, toties inculcare uideamur.* Clarum est *igitur ex ipsa tabella, segmentum maius & ordine primũ, constare partibus* 74 (*qualium ipse diameter est* 120) *& minutis sexagenariis* 9, 50, 40, 59, 18, 14 : *tertium uerò segmentum, habere partes* 28, *& minuta* 19, 41, 21, 58, 36, 28. *Dimidium consequenter segmenti ordine sexti, continet partes* 3, *& minuta* 20, 37, 16, 2, 47, 4 : *& ipsius decimi segmenti dimidium, hæc tantum minuta comprehendit*, 29, 16, 12, 49, 8, 35. *Vnum porrò quartum segmenti decimisexti, est minutorum* 0, 48, 56, 6, 45, 55, 30. *Et dimidium segmenti decimiseptimi, hæc complectitur minuta* 1, 0, 29, 14, 9, 19 : *quorum pars sexagesima, reuocatur in minuta* 0, 1, 0, 29, 14, 19, 9. *Pars deinde sexagesima nonagesima secunda segmẽti decimioctaui, sub hic cõtinetur*

		ptes.	m̄.	2̄.	3̄.	4̄.	5̄.	6̄.	7̄.	8̄.
Segmentum maius,	*i.*	74	9	50	40	59	18	14	0	0
Segmentum ordine	*iij.*	28	19	41	21	58	36	28	0	0
Dimidiũ segmẽti <	*vi.*	3	20	37	16	2	47	4	0	0
	x.	0	29	16	12	49	8	35	0	0
Quarta pars	*xvi.*	0	0	48	56	6	45	55	30	0
$\frac{1}{60}$ $\frac{1}{2}$ *segmenti*	*xvij.*	0	0	1	0	29	14	9	19	0
$\frac{1}{60}$ $\frac{1}{192}$	*xviij.*	0	0	0	0	23	21	52	6	35
$\frac{1}{60}$ $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{96}$	*xviij.*	0	0	0	0	0	46	43	44	13
Latus quadrati.		106	20	15	28	49	59	1	39	48

tinetur minutis 0,0,23,21,52,6,35: quorum ſexageſima pars eiſdem exprimitur numeris, ſed per unicum ordinem uerſus dextram reuocatis. Nonageſima denique ſexta pars ipſius decimioctaui ſegmenti, hæc habet minuta 0, 0, 46,43,44,13: quæ bis dextram uerſus per 60 diſtributa, uertuntur in minuta 0,0, 0, 0, 0, 46, 43, 44, 13. Hæc autem omnia ſimul iuncta, in unúmue coadunata numerorum ordinem, conficiunt partes 106, & minuta 20, 15, 28, 50: deeſt enim ſolummodò 1 minutum quintum, repræſentans $\frac{1}{777600000}$ unius integræ partis, ex uicioſo irrationalium ſegmentorum, radicúmue non quadratarum calculo de neceßitate procreatum, relatione (nedum aliquid fiat) prorſus indignum. Atqui totidem partium atque minutorum, repertum eſt latus quadrati, ipſi dato circulo (cuius dimetiens eſt partium 60) æqualis, per antecedentis ſextæ propoſitionis demonſtrationem. Satis igitur huic propoſitioni factum eſſe uidetur.

¶Idem aliter.

2 ¶IDEM PRAETEREA LATVS QVADRATI *ipſi dato circulo æqualis, ex præfatis ſegmẽtis proportionalibus diametri, in hunc modum colligetur. Sit itaque datus ſemicirculus a b c: cuius diameter a c in tot ſegmenta proportionalia & eodẽ ordine diſtributa partiatur, ut in prefata ſecũda propoſitione luculẽter expreßimus, & ꝓpria eorundem ſegmentorũ tabella continetur. Subtẽdatur poſtmodum recta quędã linea c b, quæ conſtet ex reſiduo ſemidiametri: ſubtracta in primis quarta parte ſegmẽti proportionalis ordine quarti, & dimidio noni ſegmẽti, atq; ſexageſima ꝑte dimidij ſegmẽti decimiquarti, & parte inſuper ſexageſima unius tertię ꝑtis ſegmẽti decimiſeptimi, & ſexageſima itidẽ*



pte unius quadragesimę partis segmẽti decimioctaui, unà cũ sexagesima pte unius partis sexagesimę alterius sexagesimę unius decimę ptis segmẽti ordine sedecimi. Et cõnectatur demũ a b linea recta: quã aio fore latus quadrati, quod ipsi dato æquum est circulo. ¶ *Clarũ est enim (ut id solito numerorũ probemus examine) ex sæpiùs allegato segmentorũ proportionalium ipsius dimetientis calculo, unum quartum segmenti proportionalis ordine quarti, habere partes 4, & minuta 22, 36, 59, 15, 31, 19, 30: & dimidium segmenti noni, hæc solùm minuta continere 0, 47, 21, 36, 48, 9, 58. Dimidium autem segmenti decimiquarti, habet minuta 4, 16, 13, 41, 13, 1: quorum pars sexagesima, eosdem complectitur numeros, sed per unicum ordinem dextram uersus reuocatos, in hunc modum 0, 4, 16, 13, 41, 13, 1. Vnum porrò tertiũ segmenti decimiseptimi, sub his continetur minutis, 0, 40, 19, 29, 26, 12, 40: & horum pars sexagesima sub his 0, 0, 40, 19, 29, 26, 12, 40. Quadragesima deinde pars segmenti decimioctaui, hæc uidetur habere minuta 0, 1, 52, 8, 58, 7, 36: quæ distributa semel per 60, restituunt minuta 0, 0, 1, 52, 8, 58, 7, 36. Ipsius denique sedecimi segmenti pars decima, his minutis exprimitur 0, 19, 34, 26, 42, ferè: quæ ter uersus dextram per 60 distributa, reuocantur in minuta 0, 0, 0, 0, 19, 34, 26, 42. Hæc autem omnia solito more in unum composita numerorum ordine, efficiũt partes 4, & minuta 23, 29, 19, 17, 58, 41, 15, 58: quibus detractis ex 60.*

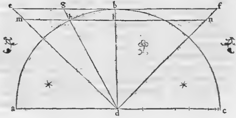
	ptes	m.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$\frac{1}{4}$ *segmenti* iiij.	4	22	36	59	15	31	19	30	0
$\frac{1}{2}$ *segmenti* ix.	0	0	47	21	36	48	9	58	0
$\frac{1}{60}\ \frac{1}{2}$ xiiij.	0	0	4	16	13	41	13	1	0
$\frac{1}{60}\ \frac{1}{3}$ xvij.	0	0	0	40	19	29	26	12	40
$\frac{1}{60}\ \frac{1}{40}$ xviij.	0	0	0	1	52	8	58	7	36
$\frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{10}$ xvi.	0	0	0	0	0	19	34	26	42
Horum summa.	4	23	29	19	17	58	41	15	58
Residuum de 60.	55	36	30	40	42	1	18	44	2

partibus semidiametri, relinquunur partes 55, & minuta 36, 30, 40, 42, 1, 18, 44, ferè. Tanta est igitur recta c b: cuius quadratum habet partes 3092, & minuta 18, 27, 41, 34, ferè: deficiunt enim circiter 27 minuta sexta, quæ faciunt $\frac{9}{20}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}$, *& reducuntur ad* $\frac{1}{1728000000}$ *unius integræ partis, ex sæpiùs allegato irrationalium calculo de necessitate peccante generatum. Quadratum porrò quod ex c b, subductum ex quadrato dimetientis a c: relinquit quadratum ipsius a b, per 47 primi elementorum Subtractis ergo partibus 3092, & minutis*

nutis 18, 27, 41, 34, præfati quadrati quod ex c b, de 14400 partibus quadrati ipsius dimetientis a c: relinquuntur partes 11307, & minuta 41,32,18,26. Tantum est igitur quadratum, quod ex a b recta describitur. Atqui totidem partium atque minutorum inuēta est area circuli, cuius diameter est partium 120, per antecedentem sextam propositionem. Manifestum est igitur, rectam a b esse latus quadrati, quod dato æquum est circulo. Quod rursum susceperamus inueniendum.

¶Idem rursum aliter.

3 ¶ESTO RVRSVM DATVS SEMICIRCVLVS *a b c, cuius centrum d, & diameter a d c, in quem perpendicularis incidat semidiameter d b: sitque latus circunscripti quadrati e b f, illiusque semidiametri d e atque d f. Et diuiso a d c diametro in tot segmenta proportionalia, & eodem ordine distributa, ueluti secunda huius libri propositione dictum atque obseruatum extitit: secetur ex ipsa b e recta quædam linea b g, quæ sit æqualis dimidio segmenti minoris ipsius diametri, & dimidio segmenti proportionalis ordine quarti: aut segmento tertio, & dimidio sexti segmenti proportionalis eiusdem diametri: minus tamen sexagesima parte ipsius segmēti proportionalis ordine quarti, atque parte itidem sexagesima medietatis segmenti duodecimi, & parte insuper sexagesima unius quartæ partis quindecimi segmenti, detracta priùs eiusdem sexagesimæ partis parte rursum sexagesima. Et connectatur d g linea recta, quæ secet circunferentiam ipsius circuli in puncto h. Consequenter, per punctum h dimetienti a c atque ipsi e f parallela ducatur h l, qua utrinque producta, contingat d e,*



atque d f semidiametros in punctis m & n. Erit enim m n recta, latus quadrati ipsi dato circulo æqualis. ¶ *Resumantur nanque ex secunda huius propositione, segmenta proportionalia dimetientis, in partibus qualium ipse diameter est* 120: *uelut obiecta tabella continetur.*

Segmenta proportionalia diametri, partium 120.								
	ptes	m.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
i.	74	9	50	40	59	18	14	0
ii.	45	50	9	19	0	41	46	0
iii.	28	19	41	21	58	36	28	0
iiii.	17	30	27	57	2	5	18	0
v.	10	49	13	24	56	31	10	0
vi.	6	41	14	32	5	34	8	0
vii.	4	7	58	52	50	57	2	0
viii.	2	33	15	39	14	37	6	0
ix.	1	34	43	13	36	19	56	0
x	0	58	32	25	38	17	10	0
xi.	0	36	10	47	58	2	46	0
xii	0	22	21	37	40	14	24	0
xiii.	0	13	49	10	17	48	22	0
xiiii.	0	8	32	27	22	26	2	0
xv.	0	5	16	42	55	22	20	0
xvi.	0	3	15	44	27	3	42	0
xvii.	0	2	0	58	28	18	38	0
xviii.	0	1	14	45	58	45	4	0

Dimidium itaque segmenti minoris ipsius dimetientis, habet partes 22, *& minuta* 55,4,39,30,20,53: *& dimidium segmenti ordine quarti, partes* 8, *& minuta* 45, 13,58,31,2,39. *Quæ simul iuncta, efficiunt partes* 31, *& minuta* 40,18,38,1,23,32. *Idem etiam colligetur, si* 28 *partes, & minuta* 19,41,21,58,36,28, *segmenti ordine tertij, componantur dimidio sexti segmenti, partibus uidelicet* 3, *& minutis* 20,37,16, 2,47,4: *consurgent enim rursum partes* 31, *& minuta* 40,18,38, 1,23,32. *Quartum porrò segmentum proportionale, est partium* 17, *& minutorum* 30,27,57,2,5,18: *quorum pars sexagesima solis uidetur constare minutis, in hunc modum,* 0,17,30,27,57,2,5,18. *Dimidium autem segmenti ordine duodecimi, habet minuta* 11,10,48,50,7, 12. *Vnum insuper quartum quindecimi segmenti, est minutorum* 1,19, 10,43,50,35: *quæ per* 60 *solito more distributa, uertuntur in minuta* 0,1,19,10,43,50,35. *Hi porrò tres minutorum ordines in unum compositi, conficiunt minuta* 17,42,57,56,36,3,5: *à quibus si detrahatur præfata sexagesima pars unius quarti segmenti quindecimi iterum per* 60 *distributa, quæ erit minutorum* 0,0,1,19,12,43,50,35, *relinquentur minuta* 17,42,56,37,25,19,14,25. *Quæ subducta ex supradictis partibus* 31, *& minutis* 40,18,38,1,23,32: *relinquunt partes* 31, *& minuta* 22,35,41,24, *ferè. tanta est igitur ipsa b g linea recta: cuius quadratum habet partes* 984, *& minuta,* 29,23,18, 23,22,33,57,36. *Quadratum autem ipsius d b semidiametri, est partium*

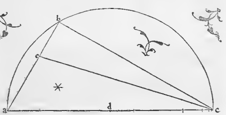
	ptes	m̄.	2̄.	3̄.	4̄.	5̄.	6̄.	7̄.	8̄.
$\frac{1}{2}$ *secundi segmẽti.*	22	55	4	31	30	20	53	0	0
$\frac{1}{2}$ *quarti.*	8	45	13	58	31	2	39	0	0
Horum summa.	31	40	18	38	1	23	32	0	0
Segmentum iij.	28	19	41	21	58	36	28	0	0
$\frac{1}{2}$ *segmenti* vi.	3	20	37	16	2	47	4	0	0
Horum summa.	31	40	18	38	1	23	32	0	0
$\frac{1}{60}$ *segmenti* iiij.	0	17	30	27	57	2	5	18	0
$\frac{1}{60}\frac{1}{2}$ *segmenti* xij.	0	0	11	10	48	50	7	12	0
$\frac{1}{60}\frac{1}{4}$ *segmenti* xv.	0	0	1	19	10	43	50	35	0
Horum summa.	0	17	42	57	56	36	3	5	0
$\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{4}$ xv.	0	0	0	1	19	10	43	50	35
Residuum primũ.	0	17	42	56	37	25	19	14	25
¶ *Recta b g.*	31	22	35	41	24	*ferè.*			

partiũ 3600. Hæc autẽ simul iuncta, conficiũt partes 4584, & minuta 29, 23,18,23,22, 33, 57, 36: quorum radix quadrata, uero, quãtũ ars patitur numerorum, proxima, est partium 67, & minutorum 42,31,53,53. Tanta est ipsa d g, per 47 primi elementorum: rectus est enim angulus qui sub d b g. Et quoniam triangula b d g & h d l, sunt inuicem æquiangula, per 29 & 32 ipsius primi elementorum: est igitur per quartam sexti eorundem elementorum, ut g d ad d b, sic h d ad ipsam d l. Ducatur ergo h d in d b, fient partes 3600 (nam utraque est semidiameter, & proinde partium 60) quæ diuisa per partes 67, & minuta 42,31,53,53, restituunt partes 53, & minuta 10,7,44,25. Tanta est ipsa d l, per uulgatam 4 proportionalium regulam: cui utraque & m l & l n est æqualis. Et tota propterea m n est partium 106, & minutorum 20,15,28,50: quantum uidelicet inuentum est latus quadrati circulo æqualis, cuius diameter est partium 120, per antecedentem sextam propositionem. Est igitur recta m n latus quadrati ipsi dato circulo, cuius dimidium est a b c, æqualis.

¶Iterum idem aliter.

4 ¶IDEM PRAETEREA LATVS QVADRATI *ipsi dato circulo æqualis, in hunc rursum poterit inueniri modum. Resumatur ipsius dati circuli dimidium a b c, cuius centrum d, & dimetiens a d c. Et subtendatur ipsi a d semidiametro æqualis a b, hoc est, latus hexagoni æquilateri & æquianguli in dato circulo descripti: & cõnectatur recta b c, quę est latus trianguli æquilateri similiter & æquiãguli in eodem circulo descripti. Diuiso postmodum a c dimetiente in totidem segmenta proportionalia, & eodem prorsus ordine distributa,*

ut ſecunda huius libri propoſitione dictum extitit, atque proxima circuli quadratum reſumptum: ſecetur ex a b latere recta quædam linea b e, quæ conſtet ex duplo ſegmenti proportionalis ipſius diametri ordine quinti, & dimidio noni, & quarta parte duodecimi, atque octaua parte decimiſeptimi, unà cum parte ſexageſima quarta ſegmenti ordine decimioctaui, uniúſque trigeſimæ ſecundæ partis eiuſdem decimioctaui ſegmenti parte ſexageſima (quæ ſimul efficiunt $\frac{31}{1920}$) & connectatur demum recta e c, quæ erit latus quadrati ipſi dato circulo æqualis. Quod ſolito numerorum examine, duximus eſſe confirmandum.



¶*Reſumantur enim ſæpiùs expreſſa ipſius dimetientis ſegmenta proportionalia, in partibus qualium præfatus diameter eſt 120: ut in proxima partis tabella continetur. Segmentum itaque proportionale ordine quintum, habet partes 10, & minuta 49, 13, 24, 56, 31, 10: quæ duplata, efficiunt partes 21, & minuta 38, 26, 49, 53, 2, 20. Dimidium autem noni ſegmenti, ſub his tantum comprehenditur minutis 47, 21, 36, 48, 9, 58: & quarta pars ſegmenti duodecimi, habet minuta 5, 35, 24, 25, 3, 36: & pars octaua decimiſexti, minuta 0, 30, 14, 37, 4, 39, 30.*

		ptes.	m.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Duplum	v.	21	38	26	49	53	2	20	0	0
Dimidium	ix.	0	47	21	36	48	9	58	0	0
$\frac{1}{4}$ ſegmenti	xij.	0	5	35	24	25	3	36	0	0
$\frac{1}{8}$ ſegmenti	xvij.	0	0	30	14	37	4	39	30	0
$\frac{1}{64}$	xviij.	0	0	1	10	5	36	19	45	0
$\frac{1}{60}$ $\frac{1}{32}$	xviij.	0	0	0	2	20	11	12	39	30
¶ Recta b e.		22	31	55	18	9	8	5	54	30

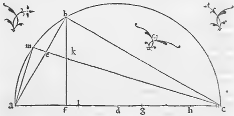
Pars uerò ſexageſima quarta ſegmenti decimioctaui: his exprimitur minutis 0, 1, 10, 5, 36, 19, 45: & unius trigeſimæſecundæ partis eiuſdem decimi-

decimioctaui segmenti pars sexagesima, hæc solùm uidetur continere minuta, 0,0,2,20,11,12,39,30. Quæ in unum composita numerum, efficiunt partes 2, & minuta 31,55,18,9,8,6, ferè. Tanta est igitur ipsa b e: cuius quadratum habet partes 507, & minuta 41,32,18, 26, propemodum: deest enim solummodo $\frac{1}{4}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}$ *unius integræ partis quæ reuocantur ad* $\frac{1}{51840000}$, *relatione prorsus indignum, si irrationalium segmentorum, surdarúmue radicum perpendatur calculus. Qualium autem partium diameter a c est 120, talium a b est 60. Quadratum porrò ipsorum 120, est partium 14400: & quadratum ipsorum 60, partium 3600. Dempto autem quadrato ipsius a b, ex quadrato dimetientis a c, relinquitur quadratum ipsius b c, per 47 primi elementorum: rectus est enim angulus qui ad b, per 31 tertij eorundem elementorum. Subductis itaque 3600 partibus, ab ipsis 14400, relinquuntur partes 10800: tantum est igitur quadratum ipsius b c. Ex quadratis tandem ipsarum e b atque b c, resultat quadratum ipsius e c, per eandem 47 primi elementorum. Hoc autem erit partium 11307, & minutorum 41, 32, 18, 26: quantum uidelicet inuentum fuit quadratum æquale circulo, cuius diameter est partium 120, per antecedentem sextam propositionem, qua dato circulo æquale quadratum ex præostensa ratione circunferentiæ ad ipsius circuli diametrum satis fideliter expressisse uidetur. Est igitur e c recta latus quadrati, quod ipsi dato æquum est circulo.*

¶Aliter rursum idem.

5 ¶ADDE QVOD IDEM LATVS E C, ALIA *ratione promptissimè colligi poterit. Nam resumpta priori figura, si ex puncto b in basim a c trianguli rectanguli a b c, perpendicularis deducatur b f, per duodecimam primi elementorum: & segmēto proportionali dimetientis ordine tertio, hoc est, segmento maiori segmenti minoris totius dimetiētis a c (ipsi uidelicet g h) æqualis secetur f k, & connectatur c k linea recta: coincidet eadem c k in directū continuata uersus k, in punctum e ipsius lateris a b: eritque rursum eadem e c latus quadrati, quod ipsi priùs dato circulo coæquatur.*

¶AVT, SI VELIS, DIVIDATVR SEGMENTum a g bifariam, in puncto quidem l, per decimam primi elementorum: & ipsi a l seu l g, æqualis subtendatur, aut coaptetur a m, per primam quarti eorundem elementorum, quæ tangat circunferentiam a b c in punctis a & m. Nam si connectatur c m linea recta, transibit indubitanter eadem c m, per ipsum punctum e præfati lateris a b: eritque propterea illius pars e c, propositum quadrati latus, quod ipsi dato circulo est æquale.



Nec hic alia opus esse reor demonstratione, cùm utroque modo latus ipsum coincidat in rectam e c: quam fore latus propositi quadrati, numerali supputatione fuit præostensum.

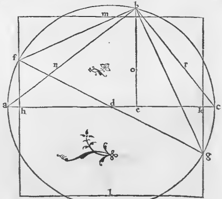
PROPOSITIO IX.

COmpendiarias aliquot circuli quadraturas, tũ prius ostensis, tum inuicem ad amussim conuenientes, pendenter elucidare.

¶QVANQVAM EX SVPRADICTIS MVLTIfariam colligi uel facilè posit, qua ratione circulus in quadratum æquale reuocetur: perutile nihilominus duximus, & studiosis omnibus futurum non ingratum, si compendiarias aliquot, à nobis recèns adinuentas circuli quadraturas, prius demonstratis, atque inuicem (si diligenter examinentur) conuenientes, familiariter elucidemus. Quas nullis

lis prorsus alijs, quàm ocularibus ostensionibus in præsentiarum confirmabimus: ne præsens uolumen in iniustam molem producere cogamur, néue illorum confundamus ingenia, qui talibus inuentis solent utcunque delectari.

1 ¶SIT IGITVR IN PRIMIS DATVS CIRCVLus *a b c, cuius cẽtrum d, diameter uerò a c: cui quidem circulo expediat quadratum æquale describere. Diuidatur itaque diameter a c proportionaliter in puncto e, per 30 sexti elementorum, cuius segmentum maius sit a e, minus autem e c. Excitetur deinde perpendicularis e b, per undecimam primi elementorum: quæ per 13 ipsius sexti elementorum, erit media proportionalis inter segmenta a e & e c. Connexis postmodũ a b atque b c lineis rectis, subtendatur, coaptetúrue ipsi b c æqualis b f, aut ipsi a b æqualis b g, per primam quarti eorundem elementorum: hoc est, inuertatur triangulum rectangulum a b c. Nam si per punctum f, ipsi b e parallela ducatur f h, quæ secet diametrum a c in ipso puncto h: aut per punctum g, eidem b e parallela g k, quæ secet eundem a c dime-*



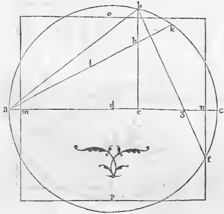
k

tientem in ipso puncto k : *erit utraque d h & d* k , *semilatus quadrati quod ipsi dato æquum est circulo, & proinde tota h* k *eiusdem quadrati latus. Describatur igitur ex ipsa h* k, *quadratum h l k m.*

¶ *Nec te ignorare uolumus, si a b proportionaliter diuidatur in puncto n, & b e in puncto o, atque b c in puncto r : segmentum maius b n esse æquale perpendiculari b e, & n a segmentum minus æquum esse segmẽto maiori b o, atque b r segmentum maius coæquari segmento minori e c: nec non ipsam b c æqualem esse segmẽto maiori a e ipsius dimetiẽtis a e c. Mirabilis profecto in a b c triangulo, proportionalium segmentorum reciprocatio.*

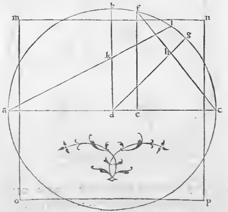
¶SIT RVRSVM DATVS CIRCVLVS A B C, *cuius centrum d, & diameter a c diuisus proportionaliter in puncto e, cuius segmentum maius sit a e, minus uerò e c. Et erecta perpendiculari e b, connectatur a b linea recta: cui æqualis subtendatur aut in ipso coaptetur circulo, quæ sit b f, ut in proxima dictum est circuli quadratura. Secet autem recta b f semidiametrum d c m, puncto g: & segmento g c æqualis secetur ex e b, quæ sit b h, per 3 primi elementorum. Connecta-* 2

tur

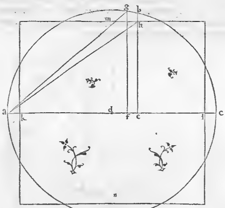


tur demum recta a h, quæ directè producta ad partes h, cadat in circunferentiæ punctum k. Erit enim a h k linea recta, latus quadrati ipsi dato circulo æqualis. Hæc igitur bifariam diuidatur in puncto l, & dimidiæ illius parti l a aut l k, secentur æquales d m & d n: atque ex tota m n (quæ ipsi a k est æqualis) quadratum describatur m o n p eidem circulo a b c æquale.

3 ¶ RESVMATVR ITERVM DATVS CIRCVLUS *a b c, cuius centrum d, diameter autem a c diuisus (ueluti supradictum est) proportionaliter in puncto e. Et erectis d b & e f lineis rectis, super a c diametro perpendicularibus, connexáque f c linea recta: diuidatur quadrans circunferentiæ b c bifariam in puncto g, per 30 tertij elementorum. Connectatur postmodum recta d g, quæ secet f c rectam in puncto h: & ipsi f h, æqualis secetur d k. Connexa tandem a k linea recta, ea directè producatur in circunferentiæ punctum l. Quoniam a l erit latus quadrati dato a b c circulo æqualis: ex ipsa igitur a l, aut illi æquali m n, quadratum describatur m n o p.*

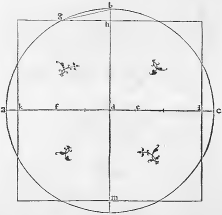


¶ESTO RVRSVM DATVS CIRCVLVS A B C, 4
cuius centrum d, & diameter a c diuisus proportionaliter in puncto e, unà cum e b perpendiculari super a c: ut in præcedentibus dictum atque obseruatum fuit circuli quadraturis. Et diuidatur segmentum d e proportionaliter in puncto f, cuius segmentum maius sit d f, minus uerò f e, per sepiùs allegatam 30 sexti elementorum. Et per f punctum, ipsi e b parallela ducatur f g, per 31 primi eorundem elementorum. Connexa tandem a g linea recta, subtendatur illi æqualis a h, quæ secet e b rectam in ipso puncto h. Quoniam e h recta, erit dimidium lateris eius quadrati, quod ipsi dato æquum est circulo. Secentur itaque d k & d l, eidem e h æquales: & ex ipsa k l quadratum ipsum describatur, quod sit k m l n.



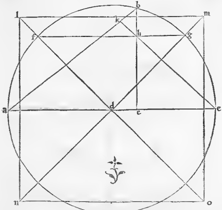
¶DETVR CONSEQVENTER IDEM CIRCV- 1
lus a b c, cuius centrum d, dimetiens uerò a c, diuisus (ueluti sæpiùs dictum est) proportionaliter in puncto e, cuius segmentum maius sit a e,

a e, minus uerò e c: cui æqualis secetur e f. Et erecto d b semidiametro super a c perpendiculari, ipsi a f æqualis subtendatur, coaptetúrue b g. Per punctum deinde g, ipsi dimetienti a c parallela ducatur g h, quæ secet d b semidiametrum in pũcto h. Nã d h erit semilatus quadrati, quod ipsi dato coæquatur circulo. Fiat igitur utraque d k & d l æqualis ipsi d h: & ab ipsa k l describatur ipsum quadratum h k m l eidem circulo a b c æquale.



6 ¶SIT VELVT ANTEA DATVS CIRCVLVS *a b c, illiúsque centrum d, & diameter a c: cui quidem circulo operæpretium sit dare quadratum æquale. Diuidatur itaque dimetiens a c proportionaliter in puncto e, cuius segmentum maius sit rursum a e, minus autem e c: erigatúrque perpendicularis e b. Connexa deinde a b linea recta, subtendatur latus quadrati in dato circulo descripti, sitque illud f g dimetienti a c parallelum: cuius interfectio cum ipsa e b perpendiculari sit h. Et connectatur c h linea recta,*

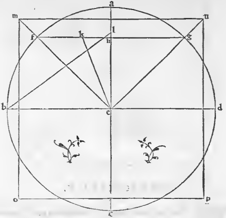
quæ in directum producta ad partes h, cadat in punctum k ipsius a b lineæ rectæ. Connexis postmodum d f & d g semidiametris, & in continuum directúmque productis uersus l & m, rectum comprehendentibus angulum qui sub l d m: secentur d l & d m æquales ipsi c k. Connectatur tandem recta l m, ex qua describatur quadratum l m n o: illud enim æquabitur dato circulo a b c. quemadmodum per aliquam antea demonstratam circuli quadraturam, confirmari uel facilè potest.



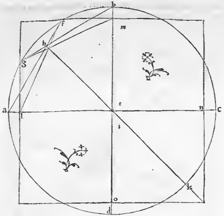
¶RESVMATVR ITERVM CIRCVLVS A B C, *cuius centrum e, dimetientes uerò a c & b d, ad rectos angulos circa idem centrum e, sese inuicem bifariam dispescentes. Subtendatur itaque latus quadrati in eodem circulo descripti f g, ipsi diametro b d parallelum: quod secet a e semidiametrum in puncto h. Et diuidatur f h proportionaliter in puncto k, cuius segmentum maius sit f k, minus uerò k h. Connexa post modum e k linea recta, seceturilli æqualis e l: & connectatur demum recta b l. Ipsi autem b l æquales secẽtur e m & e n,* 7

ad

ad angulum rectum ſub m e n conſiſtentes. Nam connexa m n linea recta, erit latus quadrati, quod dato æquum eſt circulo.



8 ¶EXPONATVR TANDEM PRAEFATVS CIRculus a b c d, *cuius centrum e, dimetientes uerò a c & b d, in eodem centro e ad rectos ſeſe inuicem dirimentes angulos. Et ſubtendantur a f & b g lineæ rectæ, ipſi a e ſemidiametro æquales: quæ ſeſe inuicem ſecent in puncto h. Connectatur deinde h e linea recta, quæ directè producta ad partes e, uerſus i & k, contingat circunferentiam in ipſo puncto k. Recta poſtmodum h k bifariam diuidatur in ipſo puncto i: & dimidiæ parti h i uel i k, æquales ſubtendantur f l atque g m, in ſemidiametros a e & e b coincidentes. Erit enim utraque e l & e m, dimidium lateris propoſiti quadrati, quod ipſi dato æquatur circulo. Secentur igitur e n & e o, utrique ipſarum e l & e m æquales: & ex ipſa l n aut m o quadratum deſcribatur l m n o: quod ipſi dato circulo a b c d, ex præoſtenſis circuli quadraturis æquum eſſe conuincetur.*

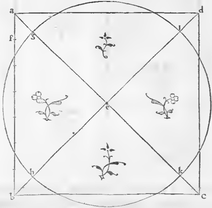


PROPOSITIO X.

DAto quadrato, inuenire diametrum, aut semidiametrum circuli, qui eidem quadrato uersa uice sit æqualis.

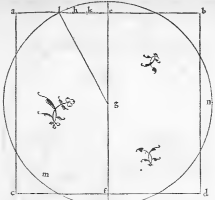
¶QVEMADMODVM CIRCVLVM, IN QVA-
dratum æquale multifariam reuocare docuimus, sic dato quadrato cir-
culum æqualem uersa uice nitemur describere: idque compendiaria rur-
sum, atque per sese manifesta traditione, ut in proximis dictum atque
obseruatum fuit circuli quadraturis. ¶*Sit igitur in primis datum qua-*
dratum a b c d, cuius diameter a c & b d, se diuidant bifariam in pun- 1
cto e. Et *abscindatur ex a b latere pars illius septima, per nonam sexti*
elementorum, quæ sit a f. Ipsi postmodum a f, æqualis fecetur a g, per
tertiam primi eorundem elementorum. Et *centro e, interuallo autem*
e g, circulus describatur g h k l: quem aio æqualem esse dato quadrato
a b c d. *Huius autem quadrati circulaturæ probationem, aut nume-*
ris

ris examinandam, aut priùs demonstratis circuli quadraturis conferendam breuitatis causa relinquimus. Si enim circulo g h k l, æquale quadratum per antecedentium propositionum descripseris, offendes illud dato quadrato a b c d adamussim conuenire.



2 ¶SIT RVRSVM DATVM QVADRATVM A *b c d, cuius utrunque latus a b & c d bifariam diuidatur, per decimam primi elementorum: a b quidem in puncto e, & c d in puncto f. Et connexa e f linea recta (quæ erit æqualis unicuique laterum, & ipsis a c & b d parallela) ea rursum bifariam diuidatur in puncto g. Dimidium consequenter lateris a b, hoc est a e, diuidatur proportionaliter, seu per mediam & extremam rationem in puncto h, cuius segmentum maius sit a h, minus uerò h e: quod rursum proportionaliter diuidatur in puncto k, cuius segmentum maius sit e k, minus uerò segmentum k h: cui æqualis secetur h l. Nam connexa g l linea recta, erit semidiameter circuli, qui dato æqualis est quadrato. Centro itaque g, interuallo autem*

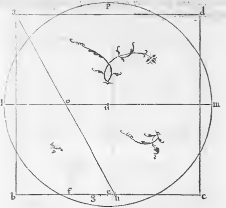
g l, circulus describatur l m n, quadrato a b c d æqualis.



¶ESTO RVRSVM DATVM QVADRATVM 3 *a b c d: & diuidatur b c latus bifariam in puncto e. Postea dimidium latus b e proportionaliter diuidatur in puncto f, cuius segmentum maius sit b f, minus uero f e: quod rursum diuidatur proportionaliter in puncto g, cuius segmentum maius sit f g, minus uerò segmentum g e. Dimidio tandem ipsius g e, æqualis seceture h: & connectatur a h linea recta, quam aio esse diametrum circuli, qui dato quadrato est æqualis. Ducatur igitur per media puncta ipsorum a b & c d laterum, recta quædam linea l m, ipsis a d & b c lateribus parallela: cuius pars inter præfata a b & c d latera comprehensa, bifariam diuidatur in puncto n, secetque n l ipsam a h in puncto o. Secentur tandem n l & n m dimidio ipsius a h æquales, hoc est, ipsi a o uel o h: nam eadem l m, diuidet bifariam eandem a h in ipso puncto o. Et centro n, interuallo autem n l aut n m, circulus describatur l p m: quem dato quadrato a b c d, per*

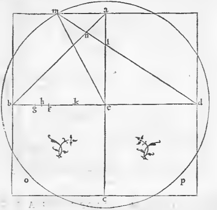
antea

antea demonstratas circuli quadraturas, haud dubiè offendetur æqualis.



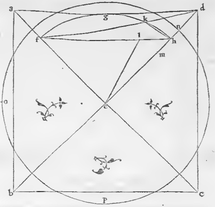
¶DETVR ITERVM QVADRATVM A B C D
4 *in circulum æqualem reducendum. Ipsum ergo quadratum a b c d, in quatuor quadrata inuicem æqualia, sub rectis a c & b d subdiuidatur: subtendatúrque latus quadrati in eodem quadrato descripti, scilicet a b.* Diuidatur *consequenter e b recta (quæ est æqualis dimidio lateri eiusdem quadrati) proportionaliter in puncto f, cuius segmentum maius sit e f, minus uerò segmentum proportionale f b: quod rursum proportionaliter diuidatur in puncto g, cuius segmentum maius sit b g, minus uerò segmentum g f: quod bifariam diuidatur in pũcto h.* Dimidiæ *postmodum ipsius e h, utpote ipsi e* k, *aut* k *h, æqualis secetur a l: & connectatur d l linea recta, quæ in directum producta uersus l, cadat in lateris punctum m, secétque rectam a b in puncto n. Si connectatur ergo tandem recta e m, illa offendetur æqualis ipsi b n: & utraque erit semidiameter circuli, qui eidem oblato quadrato coæquatur.* Centro

igitur e, interuallo autem e m, ad quantitatémue ipsius b n, circulus describatur m o p: cui si per sextam, septimam, uel octauam propositionem æquale quadratum describatur, id dato quadrato a b c d ad amussim æquale comperietur.

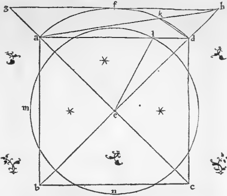


¶EXPONATVR RVRSVM IDEM QVADRA- 5
tum a b c d, cuius dimetientes a c & b d sese inuicem bifariam & ad rectos angulos diuidant in puncto e. Et describatur quadrans circunferentiæ inscripti circuli, qui sit f g h: connectatúrque f h linea recta, quæ erit latus quadrati in eodem circulo descripti. Subtendatur postmodum recta f d, quæ secet eundem circunferentiæ quadrantem in puncto k: & connectatur h k linea recta. Ipsi deinde h k, æqualis secetur h l: & connectatur recta e l, cui æqualis secetur e m. Eidem rursum h k, seu h l, æqualis abscindatur m n, per sæpius allegatam tertiam primi elementorum. Erit enim e m semidiameter circuli, qui dato quadrato est æqualis. Centro igitur e, interuallo autem e n, describatur ipse circulus, qui sit n o p: ut in ipsa continetur figura.

Poterit



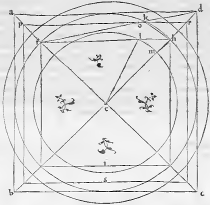
6 ¶POTERIT ET IDEM SEMIDIAMETER *circuli, qui dato quadrato eſt æqualis, aliter rurſum obtineri. Sit igitur oblatum uelut antea quadratum a b c d, cui expediat æqualem deſignare circulum. Circunſcribatur igitur ipſi quadrato a b c d circunferentiæ quadrans a f d, unà cum eidem circulo uel circunferentiæ quadranti circunſcripti quadrati latere g f h ipſi a d lateri parallelo: in quod quidem latus g f h, dati quadrati ſemidiametri e a & e d, conueniant in ipſa puncta g & h. Connectatur poſtmodum recta a h, quæ ſecet eundem circunferentiæ quadrantem a f d in puncto k: & connectatur recta d k, cui æqualis ſecetur d l. Nam connexa demum recta e l, erit ſemidiameter circuli, qui ipſi dato quadrato eſt æqualis. Centro igitur e, interuallo autem e l, circulus ipſe deſcribatur, qui ſit l m n. Vt igitur proxima quadrati circulaturæ, per inſcripti circuli quadrantem abſoluitur: haud diſsimiliter hæc, à quadrante circunſcripti circuli pendere uidetur.*



¶Corollarium, de duobus quadratis, quorum alterum in dato circulo describitur, alterum uerò eidem circunscribitur circulo.

¶DATIS IGITVR DVOBVS QVADRATIS, 7
quorum alterum in dato circulo describitur, alterum uerò eidem circunscribitur circulo: utrique quadrato, una eadémque uia æqualis circulus promptissimè describetur. Vt ex sequenti potes elicere figura: in qua circulo f g h circunscribitur quadratum a b c d, & ut in penultima dictum est quadrati circulatura, semidiameter circuli eidem quadrato æqualis, est e n: In eodem porrò circulo descriptum quadratum e f h i, & ueluti proxima quadrati circulatura dictum est, semidiameter circuli eidem quadrato æqualis est e l. ¶Adde quòd si rectæ f l æqualis secetur f o, & per ipsum punctum o ipsis a d & f h parallela ducatur p r: erit eadem p r latus quadrati, quod ipsi prius dato æquum est circulo. Et proinde nedum utrique quadrato, æqualis circulus describitur: sed eidem circulo, quadratum æquale simul designatur.

PROPO-

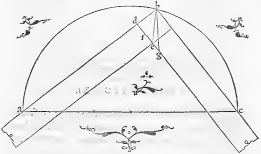


PROPOSITIO XI.

GNomonem ſic conſtruere rectangulum, ut illius adminiculo, circulus in quadratum æquale, datúmue quadratum in æqualem circulum, citius dicto transmutetur.

1 ¶ PROPOSITI GNOMONIS COMPOSITIOnem, *ſecunda propoſitione libri primi ſufficienter expreſſimus : cum quo uidelicet datis duabus lineis rectis inæqualibus, duas medias lineas rectas ſub eadem ratione continuè proportionales ſimul inuenire docuimus.* Debet igitur *ipſe gnomon (ut totum illius artificium hoc loco perſtringamus) conſtrui ex materia quapiam ſolida, utpote aurichalcea, aut alia ſimili, & huic artificio congrua. Sit autem brachiorum ipſius gnomonis latitudo libera, ſed unius latitudo alterius latitudini adamuſſim æqualis : & longitudo tanta, quantam oblatorum circulorum & quadratorum inuicem tranſmutandorum uidebitur indigere magnitu-*

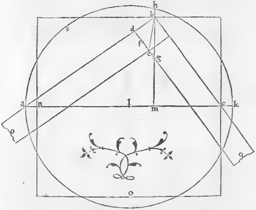
tudo: crassitudo autem si fuerit tenuis, usui præfati gnomonis magis erit apta. Commodissimum itidem erit, si alterum brachiorum fuerit utcunque longius reliquo. Vt autem ad inuentum nostrum paucis deueniamus, ad ipsius gnomonis angulum rectum qui ad a quadratum figuretur b d e, cuius unumquodque latus æquum sit latitudini brachiorum eiusdem gnomonis. Et diuidatur alterum interiorum laterum ipsius quadrati, utpote d e, proportionaliter in puncto f, cuius segmentum maius proportionale sit d f, minus uerò segmentum f e: cui æqualis secetur e g. Connectatur demum a g linea recta, totius gnomonicæ constructionis thesaurus. Cætera, tum ex præfata secunda propositione libri primi, tum ex subscripta figura colligenda relinquimus.



¶*Ex hac gnomonis constructione, atque illius usu multiplici: ex iis similiter, quæ tum libro primo, de inuentione duarum rectarum, inter datas extremas continuè proportionalium: tum hoc secundo libro, de uersione quadrantis circunferentiæ in lineam rectam, & è conuerso: atque ipsius circuli quadraturis, circulationibúsue quadrati, tam uariè à nobis adinuentis, fit manifestum: quàm diuina sit illa proportio, quæ sub linea data per mediam & extremam rationem diuisa continetur.*

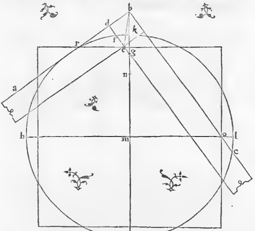
¶CVM HOC ITAQVE GNOMONE, CIRCVL- *lum in primis in quadratum æquale, hoc modo conuertes. Esto datus circulus a h k, cuius centrum l, dimetiens uerò a k. Hunc itaque dimetientem,* 2

tem, proportionaliter diuidere oportet in puncto (uerbi gratia) m, cuius segmentum maius sit a m, minus uerò segmentum m k: deinde suscitare perpendicularem m h. His in hunc modum præparatis, applicetur longiùs gnomonis latus, utpote a b, puncto a ipsius dimetientis, segmentiue maioris extremo: & eleuetur, deprimatúrue paulatim angulus a b c, donec recta linea b g coincidat in ipsam perpendicularem h m, nusquàm dimoto longiori brachio gnomonis a b ipso puncto a. Quibus absolutis, notetur casus anguli qui ad b in ipsa perpendiculari h m, atque sectio brachij minoris b c cum semidiametro a k. Nam recta b m, aut recta l c erit dimidium latus quadrati ipsi dato circulo æqualis. Describatur igitur ipsum quadratum, scilicet b n o c.



3 ¶POTERIT RVRSVM IDEM CIRCVLVS, *ipsius gnomonis adminiculo, aliter quàm supra dictum sit, in quadratũ æquale reuocari. Sit enim datus circulus h k l, cuius centrum m, dimetientes uerò h l & k m, ad rectos in centro m sese inuicem dispescentes angulos. Diuidatur itaque semidiameter m k proportionaliter in pun-*

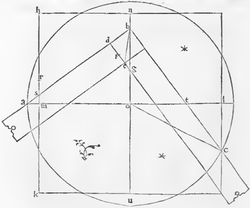
cto n, cuius segmentum maius sit m n, cui æqualis secetur ex m k in directum producta uersus b, quæ sit n b. In ipso deinde puncto b collocetur angulus rectus a b c diuertatúrque hinc & inde gnomon, donec recta b g coincidat in rectam seu perpendicularem b k m. Túncque notetur sectio lateris b c cum semidiametro m l, quę fiat in puncto o: erit enim recta m o, dimidium latus quadrati, quod dato ęquum est circulo. Adde quòd sectio lateris a b ipsius gnomonis a b c, cum circuli peripheria, scilicet punctum r, est transitus lateris ipsi h l diametro paralleli, eiusdem quadrati ipsi dato circulo ęqualis.



¶CVM AVTEM DATVM QVADRATVM IN *circulum ęqualem reuocare fuerit operęprętium, sic facito. Esto datum quadratum h k l, sub binis rectis l m & n o, sese inuicem ad punctum o bifariam dispescentibus, in quatuor quadrata distributum. Et diuidatur latus h k proportionaliter in puncto r, cuius segmentum maius sit k r:* 4

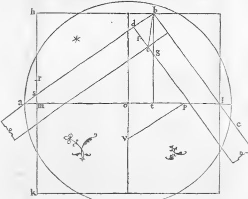
&

& ipsa m r iterum proportionaliter diuidatur in puncto s, cuius segmẽtum maius sit r s, minus uerò segmentum proportionale s m, per sæpius allegatam trigesimam propositionem sexti elementorum. His ita præparatis, applicetur latus a b ipsius gnomonis a b c ipsi puncto s, & eleuetur paulatim angulus qui ad b, donec recta b g coincidat solito more in rectam n o, immoto semper a b latere ab ipso puncto s. Quibus absolutis, notetur tandem sectio lateris a b, cum o m in directum producta uersus a: quæ sit in ipso puncto a. Quoniam o a erit semidiameter circuli eidem quadrato æqualis: Centro igitur o, interuallo autem o a, describatur idẽ circulus, qui sit a u c. Adde, quod ubi reliquum latus gnomonis, scilicet b c, secat latus ipsius dati quadrati, in ipso uidelicet puncto c: extensa o c linea recta, est eiusdem propositi circuli semidiameter. ¶Vterque præterea semidiameter o a & o c, longè facilius colligetur, si o l diuisa fuerit proportionalium in signo t, cuius segmentum maius sit o t: si latus b c per signum t transire cogatur, & recta b g super n o pendenter collocetur.



¶IDEM RVRSVM OBTINEBITVR, SI RE- 5
ſumpto priori quadrato h k l, & latere h k in ſegmenta proportionalia uelut antea diſtributo, latus a b ipſi puncto s, reliquum uerò latus b c puncto l ſimul applicetur, & eleuetur paulatim angulus rectus qui ad b, immotis ſemper lateribus gnomonis ab eiſdem punctis s & l: donec idem angulus qui ad b, cadat in ſupremum quadrati latus quod per n punctum ducitur. Nam ſectio lateris a b cum recta o m in directum producta uerſus m, quæ ſit rurſum a limitabit propoſiti circuli ſemidiametrum o a. ¶*Quòd ſi recta o l proportionaliter diuidatur in ſigno p, cuius ſegmentum maius ſit o p, & minori ſegmento p l æqualis fiat o u, connectatúrque p u linea recta, cui rurſum æqualis fiat l t, & ab ipſo puncto t perpendicularis excitetur t b: erit eadem perpendicularis t b, ſupra quam directè locanda eſt b g linea recta gnomonis a b c, & ipſius gnomonis latus b c per punctum l ſimul traducendum. Tunc enim latus a b ſecabit (uelut antea) præfatum circuli ſemidiametrum o a: nec opus erit aliquo modo diuidere latus h k. diuidet autem ipſa perpendicularis, deſcripti circuli diametrum proportionaliter, in ipſo puncto t.*

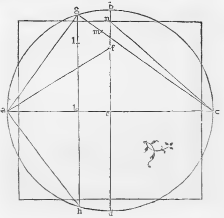
PRO-



PROPOSITIO XII.

BEneficio lateris pentagoni, atque heptagoni regularis, in dato circulo descripti, quadratum eidem circulo æquale, modis hactenus inauditis colligere.

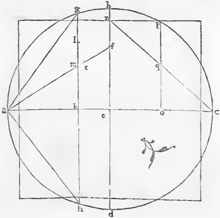
¶QVANQVAM PRAEOSTENSAE CIRCVLI *quadraturæ, unicuique rerum mathematicarum studioso (quantumuis etiam difficili) satis esse uideantur: alias nihilominus excogitauimus adinuentiones, quibus rursum datus circulus in quadratum æquale multifariam reuocatur. Quas huic secundo libro, commodissime censuimus annectendas: utpote, quæ studiosis omnibus delectationem cum admiratione causabunt, & nostræ tum diligentiæ, tum dexteritatis fidem si-*
1 *mul facere poterunt.* ¶ *Sit igitur in primis datus circulus a b c, cuius centrum e, in quo dimetientes a c & b d sese orthogonaliter intersecent.*



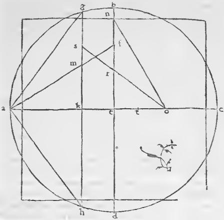
Diuidatur ergo semidiameter e b proportionaliter, seu media & extrema ratione, in puncto f, cuius segmentum maius sit e f, per 30 sexti elementorum: & connectatur a f linea recta, quæ est latus pentagoni regularis in dato circulo descripti. Ipsi deinde a f æquales subtendantur, coaptentúrue a g & a h, per primam quarti elementorum: & connectatur recta g h, quæ secet diametrum a c in puncto k. *Connectatur insuper recta g c: cui æqualis secetur ex ipsa g h, per 3 primi elementorum, quæ sit h l. Reliquæ postmodum l g equalis secetur ex ipsa g c, que sit g m. Residuę tandem m c, ęqualis subtendatur ex pũcto c in semidiametrum e b, quę sit c n. Nam recta e n erit dimidium lateris ipsius quadrati, quod dato ęquum est circulo. Dupletur ergo e n, & describatur ipsum quadratum, ut in figura continetur.*

¶POTERIT ET IDEM SEMILATVS E N, IN *hunc qui sequitur modum obtineri. Resumantur singulæ partes ipsius antecedentis figuræ, dempta g c linea recta: sitque sectio ipsius a f cum recta g h, punctũ m. Et diuidatur semidiameter e c bifariam in puncto o,* 2

per

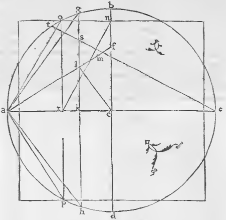


per 10 primi elementorum: atque per 11 eiusdem primi, excitetur recta o p super a c diametro perpendicularis, quæ est latus heptagoni regularis in dato circulo descripti. Ipsi postmodum k m lineæ rectæ, æqualis secetur ex eadem o p, quæ sit p q. Nam si ex puncto c, per ipsum punctum q, in semidiametrum e b, recta coextendatur linea: illa rursum coincidet in ipsum punctum n, designabitque propterea idem semilatus e n ipsius
3 *propositi quadrati.* ¶ *Adde, quòd eadem recta c n, bifariam diuiditur in ipso puncto q: utraque propterea c q & q n, æqualis est ipsi k l. Et proinde eadem k l duplata, & subtensa à puncto c per punctum q, coincidet in ipsum punctum n. Hinc præfatum semilatus e n, poterit rursum designari: atque eo duplato, describi quadratum æquale circulo dato, ut*
4 *habetur in figura.* ¶ *Idem quoque semilatus quadrati præfato circulo a b c d æqualis, in hunc obtinebitur modum. Auferatur ex finscripti pentagoni latere, recta f r, quæ sit æqualis ipsi g l: Quoniam reliqua a r,*
5 *ipsi dimidio lateri e n adamussim æquabitur.* ¶ *Aliter rursum præfatum latus quadrati dato circulo æqualis obtineri poterit. Resumatur ergo præfatus circulus a b c d, cuius centrum e, dimetientes uerò a c & b d, orthogonaliter & bifariam sese inuicem dirimentes: unà cum a finscripti pentagoni latere, & illi æqualibus a g & a h, atque subtensa g h, quæ secet rursum a e semidiametrum in puncto k, & ipsam a f in puncto m: sitque semidiameter e c bifariam diuisus in puncto o, ut in proxima descriptione. Et diuidatur e b semidiameter per mediam & extremam rationem, in puncto r, cuius segmentum maius sit b r, per ipsam 30 sexti elementorum. Ex puncto deinde o, per ipsum punctum r, in rectam g h, extendatur o s linea recta. Nam si ab eodem puncto o, in semidiametrũ e b, recta subtendatur ipsi o s æqualis: coincidet rursum eadem recta in ipsum punctum n, eritque propterea recta e n semilatus ipsius quadrati propositi. Describatur igitur ipsum quadratũ, ex dupla ipsius*
6 *e n: ut in sequenti figura cõtinetur.* ¶ *Alia rursum uia, & admodum cõpẽdiosa, præfatum semilatus e n efficietur manifestum. Nam si ex recta, segmentóue diametri o k, tertia pars abscindatur, per nonam sexti elementorum, quæ sit o t: erit eadem pars o t, æqualis ipsi f n. Et proinde segmentum maius proportionale semidiametri, utpote e f, iunctum ipsi o t, conficit dimidium latus quadrati, quod dato circulo est æquale, hoc est, ipsam e n: & cuius dupla, idem quadratum (uelut in figura obseruatur) describendum esse uidetur.*



¶HAVD MINVS FACILE, SAEPIVS EX- 7
pressum latus quadrati æqualis ipsi dato circulo, ex iam descriptus fiet manifestum. Resumatur enim præfatus circulus a b c d, unà cum suis dimetientibus a c & b d, atque rectus a f, a g, a h, atque subtensa g h, quæ secet rursum a e semidiametrum in puncto k, *ipsam uerò rectam a f in puncto l. Et diuidatur f l proportionaliter, seu per mediam & extremã rationem, in puncto m, cuius segmentum maius sit l m. Ipsi autem a m æquales subtendantur a o & a p connectatùrque recta o p, quæ secet a e semidiametrum in puncto r. Erit enim o p recta, latus quæsiti quadrati dato circulo æqualis: & utraque o r & r p, æqualis ipsi dimidio lateri e n. Describatur igitur ex ipsa o p recta quæsitum quadratum, ut in figura.* ¶ *Idem quoque latus rursum obtinebitur, si connexa e l linea recta, eidem æqualis secetur ex a e semidiametro, à puncto quidem a uersus e, quæ sit a r: & per punctum r, ipsi diametro b d parallela ducatur o p, per 31 primi elementorum. Aequalis est enim e l ipsi a r.* ¶ *Adde rursum, quòd à puncto r, alterutro duorum modorum adinuento, in se-* 9
midiametrum

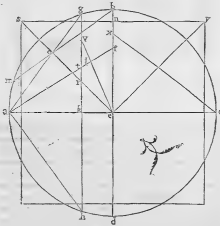
*midiametrum e b subtensa linea recta, quæ sit æqualis eidem semidia-
metro: illa coincidet adamussim in sæpius designatum punctum n, limi-
10 tabitque propterea præfatum semilatus optati quadrati e n. ¶Item si g l
bifariam diuidatur in puncto s, & à puncto c, per s, in circunferētiam,*



*recta coextendatur linea c t: illa erit æqualis ipsi o p, & proinde latus
11 eiusdem quadrati. ¶Si iuuet tandem, adminiculo ipsius lateris inscri-
pti pentagoni, semidiametrum eiusdem habere quadrati dato circulo æ-
qualis: resumatur datus à principio circulus a b c d, præfatis dimetien-
tibus a c & b d in quatuor quadrantes solito more distributis, unà
rursum cum a f, a g, a h lineis rectis inuicem æqualibus, atque subtensa
g h, quæ secet semidiametrum a c in ipso puncto k. His ita paratis, aufe-
ratur in primis ex a f inscripti pentagoni latere recta f l, quæ sit æqualis
ipsi e k. Residua enim l a, est latus heptagoni regularis in dato circulo
descripti. Subtendatur postmodum recta b m, ipsi a f, & proinde a g æ-
qualis, quæ secet eandem a g in puncto o: & connectatur e o linea recta,*

quæ secet g h rectam in puncto r. Producatur consequenter ipsa e o in directum & continuum uersus s: seceturque o s linea recta, quæ sit æqualis ipsi o r, dimidióue ipsius a l, hoc est, ipsius lateris inscripti heptagoni. Erit enim e s linea recta, semidiameter ipsius propositi quadrati.

¶ *Colligetur & idem quadrati semidiameter, in hunc modum. Esto sectio ipsius a f cum recta g h punctum t: & diuidatur g t recta bifariam in puncto u. Connectatur postmodum e u linea recta: cui secetur æqualis ex ipso e b semidiametro, quæ sit e x. Quoniam si connexa fuerit c x linea recta, illa erit æqualis eidem e s: & proinde ipsius quadrati semidiameter. hinc facilè erit ipsum describere quadratum. Nam si per punctum s, diametro a c parallela ducatur s y, per 31 primi elementorum, ea transiet (si iustè absoluta fuerint singula) per sæpiùs expressum punctum r. Et proinde si n y, fiat æqualis eidem s n, tota s y erit latus ipsius quadrati, quod dato a b c d coæquatur circulo.* 12



¶ *Habes igitur, candide ac studiose lector, duodecim modos inueniendi latus quadrati dato æqualis circulo, omnésq; ab eodem fonte scaturiêtes:*

nempe

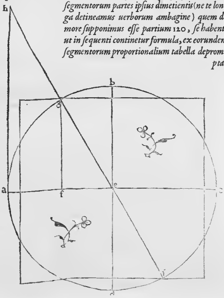
nempe ex lateris pentagoni atque heptagoni regularis in dato circulo descripti admirando beneficio. Qui quàm pulchrè ac utiliter in unum conueniant, tibi relinquimus diiudicãdum. Poterant enim singuli, sub unica figuræ descriptione comprehendi: sed clarioris intelligentiæ gratia, illos in quinque distinximus. Nec in præsentiarum aliam superaddemus confirmationem (ne uolumen hoc in immensam ac inutilem molem producamus) quàm ipsorum duodecim modorum tum inuicem, tum cum prius demonstratis circuli tetragonismis euidentißimam concordiam.

PROPOSITIO XIII.

IDem latus quadrati dato circulo æqualis, etiam cadens extra ipsum circulum, noua rursum, multisque modis uariata ratione designare.

¶IVVAT CONSEQVENTER IDEM LATVS *quadrati, quod dato æquum est circulo, etiam extra ipsum coincidens circulũ, noua rursum, multifariámque diuersificata ratione colligere. In primis ergo radicalem quandam subiiciemus eiusdem circuli quadraturam, numerali supputatione confirmatam: quæ succedentium scopus,*
1 *atque fidißimum erit examen. ¶ Sit igitur datus circulus, in quadratũ æquale reuocandus, a b c d, illiúsque centrum e, per quod transeant bini dimetientes a c & b d, ad rectos sese inuicem dirimentes angulos. Diuidatur postmodum ipse diameter a c, uel b d, per mediam & extremã rationẽ, seu proportionaliter: & segmẽtũ illius minus itidẽ proportionaliter, cuius segmentum minus iterum proportionaliter diuidatur, & deinceps in hunc modum, per 30 sexti elementorum: quatenus in toto diametro sint 18 segmenta proportionalia, nouem quidem maiora, totidémque minora, ipsis minoribus segmentis in alterutrum dimetientis extremum punctum terminatis. Quemadmodum secunda, atque septima huius libri propositione prædictum, atque obseruatum extitit. Secetur deinde ex a c diametro, recta quædam linea a f, quæ constet ex quarta ipsius diametri parte, & dimidia parte segmenti proportionalis ordine decimi, atque dimidia, & 240 parte sedecimi segmenti, ipsius præterea segmenti proportionalis ordine decimioctaui parte 1920, atque 24576, necnon 32832000. Per punctum deinde f, ipsi b d parallela ducatur f g,*

per 31 primi elementorum: quæ per 29 eiusdem primi, & decimam illius diffinitionem, perpendicularis erit super a e semidiametrum. Connectatur insuper e g semidiameter, in directumque producatur ad utrasque illius partes, uersus h & i. Per punctum consequenter a, utrique ipsarũ e b & f g parallela ducatur a h, quæ per quintum postulatum geometricum, cõueniet tandem cum ipsa h i, ad ipsum uidelicet punctum h: eritque angulus e a h rectus, per 29 primi elementorum. Et proinde recta a h tangit circulum in ipso puncto a, per corollarium 16 tertij eorundem elementorum. His ita constructis, aio rectam a h esse latus quadrati, quod ipsi dato circulo est æquale. Hoc autem uia numerorum, in hunc qui sequitur modum fit manifestum. Præfatæ nanque proportionalium segmentorum partes ipsius dimetientis (ne te longa detineamus uerborum ambagine) quem de more supponimus esse partium 120, se habent, ut in sequenti continetur formula, ex eorundem segmentorum proportionalium tabella deprompta,



pta, quam præallegata secunda, atque septima huius libri propositione conscripsimus.

ptes	m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*Quarta pars diametri.*
0	29	16	12	49	8	35	0	0	0	0	0	0	Dimidia pars *segmenti decimi.*
0	1	37	52	13	31	51	0	0	0	0	0	0	Dimidia pars *segmenti* xvi.
0	0	0	48	56	6	45	55	30	0	0	0	0	Pars 240. *eiusdem segmenti* xvi.
0	0	0	2	20	11	12	39	30	0	0	0	0	Pars 1920. } Segmenti xvii.
0	0	0	0	1	5	35	15	18	31	52	30	0	Pars 24576. } Segmenti xvii.
0	0	0	0	0	0	26	17	6	7	24	22	30	Pars 32832000. } Segmenti xvii.
30	30	54	56	20	4	26	7	24	39	16	52	30	*Recta a f.*
29	29	5	3	39	55	33	52	35	20	43	7	30	*Reliqua f e.*

Qualium igitur partium diameter a c est 120, *talium recta a f est* 30, & *minutorum sexagenariorum* 30,54,56,20,4,26,7,24,39,16,52,30: & *proinde reliqua pars semidiametri, utpote f e, habet partes* 29, & *minuta itidem sexagenaria* 29,5,3,39,55,33,52,35,20,43,7,30. Et *quoniam in triangulo a h e, ad latus a h acta est parallela f g, secat igitur eadem f g reliqua ipsius trianguli latera proportionaliter, per* 2 *sexti elementorum: sicut uidelicet e f ad f a, sic e g ad g h.* Atqui *tres primæ e f, f a, e g notæ sunt (nam ipsa f g est partium* 60) *quarta proinde g h, per* 4 *proportionalium regulam innotescet: ducendo uidelicet a f in e g,* & *productum diuidendo per f e.* Erit *autem ipsa g h partium* 62, & *minutorum* 5,49,25,10,42,12. Et *cùm punctum h extra ipsum cadat circulum,* & *ab illo geminæ procidant lineæ rectæ h a* & *h i, quarum altera, scilicet h i circulum ipsum dispescit, altera uerò, utpote h a, eundem circulum tangit. Quod igitur sub i h* & *h g continetur rectangulum, æquum ei quod ex a h tangente fit quadratum, per* 36 *tertij elementorum. Tota porrò h i, est partium* 182, & *minutorum* 5,49,25,10,42,12 *(nam diameter h i habet partes* 120) *quæ ducta in partes* 62 & *minuta itidem* 5,49,25,10,42,12, *ipsius h g, efficiunt partes* 3,8,27, *seu* 11307, & *minuta* 41,32,18,25,42, *ferè.* Totidem *itaque partium,* & *minutorum, est quadratum ipsius h a.* Sed *per antecedentem sextam propositionem, quadratum æquale circulo, cuius diameter est partium* 120, *habet itidē partes* 11307, & *minuta* 41,32,18, 26. Huiusce *propterea calculi,* & *ipsius sextæ propositionis differentia, est quintorum minutorum* 18, *quæ faciunt* $\frac{1}{43200000}$ *unius integræ partis.* Toleranda *proculdubio,* & *quæ reprehendatur indigna calculi differentia: si tum illius adeò exigua quan-*

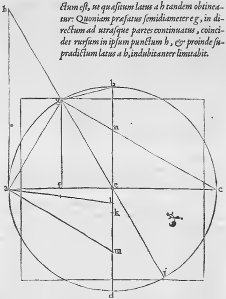
titas, tum irrationalium ſegmentorum proportionalium, ſurdarúmue radicum natura conſideretur, quæ ueris nunquàm exprimuntur numeris. Recta igitur a h, eſt latus quadrati, quod dato æquum eſt circulo.

¶ Idem aliter, ídque 9 modis admodum compendioſis.

¶POTERIT ET IDEM LATVS A H, MVLtifariam, *ſummatímque recolligi. Exponatur itaque rurſum præfatus circulus a b c d, cuius centrum e, unà cum binis dimetientibus a c & b d, in eodem centro ſeſe orthogonaliter diſpeſcentibus. Et excitetur latus quadrati eidem circulo æqualis a h, per nunc traditum artificium, aut aliquam antecedentium propoſitionum adinuentum, ſuper a c quidem diametro conſiſtens ad perpendiculum. Diuidatur inſuper diameter b d proportionaliter in puncto* k, *cuius ſegmentum maius ſit b* k, *minus uerò* k *d, per 30 ſexti elementorum. Segmentum præterea e* k *itidem proportionaliter diuidatur in puncto l, cuius ſegmentum maius ſit e l, minus autem l*k. *Connectatur poſtmodum a l linea recta, cui æqualis ſubtendatur a g: & connectatur rurſum e g ſemidiameter, in directúmque ad utraſque partes continuetur. Nam idem ſemidiameter e g (ut ipſa te docebit experientia) cadet adamuſsim in ipſum punctum g, ſupra ſcripto modo deſignatum: & ipſum propterea latus a h, ut in proxima deſcriptione limitabit. Idem obtinebitur, ſi b g recta ſubtendatur, quæ ſit æqualis dimidio ipſius a l, & connectatur rurſum e g ſemidiameter, abſoluantúrque reliqua, ueluti nunc expreſsimus. Coincidet enim præfatus ſemidiameter e g, ad partes g directè cõtinuatus, in ipſum punctũ h. Tota igitur a l, unà cum dimidia illius parte, ſubtendent quadrantem a b: ipſúmque punctum g indifferenter notabunt.* 2

¶*Idem rurſum punctum g, & ipſum pendenter quadrati latus a h, in hunc modum colligetur. Diuidatur ſemidiameter e d proportionaliter in puncto m, cuius ſegmentum maius ſit e m, minus uerò m d, per ipſam 30 ſexti elementorum: & connectatur a m linea recta. Secetur poſtmodum ex e b ſemidiametro, recta e n, quæ ſit æqualis dimidiæ parti ipſius a m: & connectatur c n linea recta. Nam ſi eadem recta c n, in directum & continuum producatur ad partes quidem n, uerſus g: probabis illam coincidere in ipſum punctum g. Connexo itaque rurſum e g ſemidiametro, cætera non aliter ueniunt abſoluenda, quàm ſupradictum* 3

ctum est, ut quæsitum latus a h tandem obtineatur: Quoniam præfatus semidiameter e g, in directum ad utrasque partes continuatus, coincidet rursum in ipsum punctum h, & proinde supradictum latus a h, indubitanter limitabit.



4 ¶RESVMATVR ITERVM IPSA NVPER descripta figura, demptis a g, g b, g c, & a l lineis rectis, manente tamen ipso puncto l: & subtendatur in primis recta a n, quæ sit æqualis ipsi b l. Diuidatur postmodum semidiameter e c proportionaliter in puncto o, cuius segmentum maius sit c o, minus uerò o e, per sæpiùs allegatam 30 sexti elementorum: & connectatur recta n o, quæ secet e b semidiametrum in signo p. Quoniam eadem recta n o, ad utrasque partes in directum continuata, cadet rursum in punctum h, ipsius lateris seu perpendicularis a h: Et proinde sæpiùs expressum quadrati latus a h, uelut antea dictum est, notificabit.

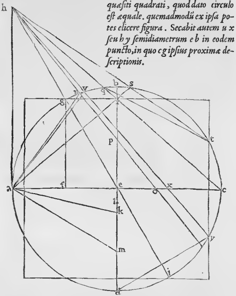
¶IDEM QVOQVE LATVS OBTINEBITVR, 5
si manente quæ nunc descripta est figura, ipsi d p aut c f lineæ rectæ (sunt enim æquales adinuicem) æqualis recta subtendatur c q, in directúmque producatur ad partes q, uersus h. Illa enim conueniet tandem cum præfato latere a h, ad ipsum quidem punctum h: ipsúmque latus quadrati quod dato æquum est circulo, rursum designabit. Adde, quòd eadem recta c h, secabit ex e b semidiametro dimidium præfati lateris: utpote e r. Triangula enim c a h & c e r, sunt inuicem æquiangula, per 29 primi elementorum: hinc per 4 sexti eorundem elementorum, est ut c a ad latus a h, sic c e ad eandem e r. Quemadmodum igitur c e est dimidium ipsius c a, sic & e r dimidium ipsius a h: & c r consequenter æqualis ipsi r h, per 2 eiusdem sexti elementorum.

6

¶ITEM SI EIDEM C F AVT D P LINEAE *rectæ æqualis rursum subtendatur a s, (quæ de necessitate transiet per punctum r) & segmento e m cum dimidia illius parte æqualis subtendatur a s: uel recta q t ipsi b l æqualis, & connectatur s t linea recta (coincident enim in unum circunferentiæ punctum, uidelicet t) eadem recta s t in directum continuata ad partes s uersus h, conueniet rursum cum a h latere ad ipsum punctum h: eritque sub t h & h s comprehensum rectangulum, æquale ei quod ex a h quadrato describitur, per ipsam 36 tertij elementorum: & proinde ipsi dato circulo æquale. Adde rursum, quod si per punctum t, ipsi diametro b d parallela ducatur, illa secabit ex semidiametro e c dimidium ipsius a h, hoc est, semilatus ipsius* 7
optati quadrati. ¶ *Præterea, si rectæ a m (quæ est latus pentagoni regularis in dato circulo descripti) æqualis subtendatur a u, & semidiameter e c bifariam diuidatur in puncto x, & connectatur u x linea recta: eadem recta u x in directum ad utrasque partes continuata, uersus h & y, coincidet rursum in ipsum iampridem designatum punctum h, atque in circunferentiæ punctum y. Erit itaque rursum quod sub discescente y h, & extrinsecus sumpta h u continetur rectangulum, æquale ipsi quadrato quod ex tangēte h a describitur: & ipsum tandem quadratum, dato circulo equale. Idem quoque obtinebis, si subtendas rectam d y, quæ sit æqualis ipsi lineæ rectæ a k, & connexa u y, absoluas reliqua uti nunc expressum est: secabit enim u y semidiametrum e c bifariam, in ipso quidem pūcto x. Adde insuper, quod si per punctum y,*

ipsi

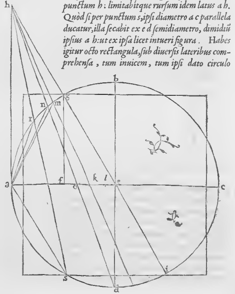
ipſi diametro b d parallela ducatur, illa tranſiet per punctũ t: ſecabitque rurſum ex ſemidiametro e c dimidium ipſius a h, hoc eſt lateris eiuſdem quæſiti quadrati, quod dato circulo eſt æquale. quemadmodũ ex ipſa potes elicere figura. Secabit autem u x ſeu h y ſemidiametrum e b in eodem puncto, in quo c g ipſius proximæ deſcriptionis.



8 ¶ *Exponatur rurſum prima figuræ delineatio, in qua datus circulus a b c d, illius centrum e, dimetientes orthogonaliter ſeſe diuidentes a c & b d, unà cum f g, & h i, atque inuento quadrati latere a h. Et diuidatur a c diameter proportionaliter in puncto k, cuius ſegmentum minus ſit a k: ſimiliter & ſegmentum e k in puncto l, cuius ſegmentum maius ſit k l, per ipſam 30 ſexti elementorum. Ipſi poſtmodum a l, æqualis ſubtendatur a m: & connectatur recta k m. Hæc enim in directum ad utraſq; partes continuata, cadet in ipſum punctum h: limitabitque propterea ipſum latus a h, cuius quadratũ (ut præoſtẽſũ eſt) dato circulo eſt ęquale.*

¶ *Manente prӕterea eadem figurӕ dispositione, subtendatur recta a n, continens k e ter, & dimidiam eius partem: & connectatur recta d n, quӕ secet a e semidiametrum in puncto o. Hӕc enim in directum producta ad partes n, uersus h, perducetur rursum in idem punctum h: designabítque presatum latus a h, cuius quadratum dato ęquum est circulo. Idem subsequetur, ubi k o fuerit ӕqualis dimidio ipsius k e: & connexa fuerit d o linea recta, atque in directum producta ad partes o, uersus h.* 9

¶ *Ex segmento tandẽ a k, secetur ӕqualis ipsi l e, & residuӕ ӕqualis subtendatur a r. Subducatur postmodum eadem l e, ex ipsa k l, & residua addatur ipsius circuli diametro: ac inde consurgenti linę rectę, ӕqualis subtendatur a s. Nam si connexa fuerit recta linea r s, atque in directũ continuata ad partes r, uersus h: illa tandem attinget sӕpiùs expressum punctum h: limitabítque rursum idem latus a h. Quòd si per punctum s, ipsi diametro a c parallela ducatur, illa secabit ex e d semidiametro, dimidiũ ipsius a h: ut ex ipsa licet intueri figura. Habes igitur octo rectangula, sub diuersis lateribus comprehensa, tum inuicem, tum ipsi dato circulo* 10



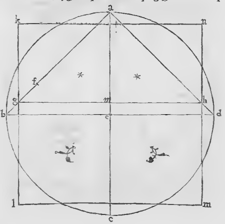
æqualia: quorum laterum, media proportionalis eidem a h coæquatur, cuius quadratum ipsi dato æquum est circulo.

PROPOSITIO XIIII.

Aliquot rursum circuli quadraturas admodum cõpendiosas, recens itidem adinuentas, paucis consequenter exprimere.

¶DVM HAEC SCRIBEREMVS (AMICE LEctor) *succurrerunt nobis adhuc in mentem aliquot quadrandi circulum non aspernandæ, admodumque compendiosæ adinuentiones, paucis quidem lineamentis expressæ: quas hoc loco pendenter annectere placuit.*

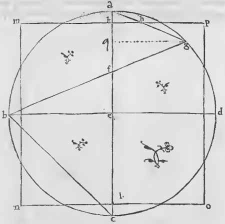
1 ¶ *Sit igitur datus circulus in quadratum æquale reuocandus a b c d, cuius centrum e, dimetientes uerò a c & b d, in eodem centro e ad rectos sese inuicem dirimentes angulos: & connectantur inscripti quadrati latera a b & a d. Secetur postmodum ex a b latere, ipsi a e semidiametro æqualis a f: & diuidatur reliqua f b proportionaliter in puncto g, cuius segmentum maius sit f g. Per punctum denique g ipsi diametro b d pa-*



rallela ducatur g h, per 31 primi eorundem elementorum. Si enim ex ipsa g h, quadratum describatur k l m n, per 46 primi elementorũ. Illud enim quadratum k l m n, ipsi dato circulo a b c d indubitanter erit æquale.

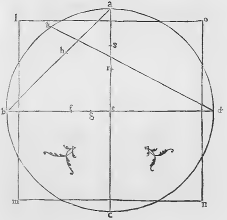
¶ *Esto rursum datus circulus, in quadratum æquale reuocãdus, a b c d,* 2
cuius centrum e, atque diametri a c & b d, in eodem centro ad rectos angulos sese inuicem dispescentes: ut in proxima dictum est figura: Sit præterea latus inscripti quadrati b c. Huic itaque b c, æqualis secetur c f, per tertiam primi elementorum. Et ex puncto b, per punctum f, recta subtendatur b f g, & connectatur a g linea recta: quæ proportionaliter diuidatur in puncto h, cuius segmentum maius sit g h, per 30 sexti elementorum. Deinde per punctum h, ipsi dimetienti b d parallela ducatur h k, per 31 primi eorundem elementorum: quæ secet a e semidiametrum in ipso puncto k. Ipsi postmodum e k, æqualis secetur e l: & ex ipsa k l, describatur quadratum m n o p, per 46 ipsius primi elementorum. Erit enim ipsum quadratum m n o p, rursum æquale eidẽ circulo dato a b c d.

Adde



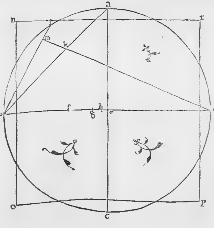
Adde quòd recta b f g diuidit circunferentiæ quadrantem a g d bifariã in ipso puncto g: & proinde a g recta est latus octogoni regularis in eodem circulo descripti.

3 ¶SIT DATVS ITERVM CIRCVLVS A B C D, *cuius centrum e, unà cum præfatis dimetientibus a c & b d, orthogonaliter sese inuicem dirimentibus, & inscripti quadrati latere a b.* Diuidatur *postmodũ semidiameter a e proportionaliter, seu media & extrema ratione, in puncto f, cuius segmentum maius sit b f, minus uerò f e: quod bifariam diuidatur in puncto g. Ipsi postmodum b g, æqualis secetur b h: & reliquæ a h, æqualis subtendatur, coaptetúrue a* k, *per primam quarti elementorum.* Connectatur *demum recta d* k:*ex qua si quadratum describatur l m n o, illud rursum dato coæquabitur circulo.* Cõtinet *autem a* k *(si ad iustam numerorum illam uolueris habere rationem) eam rectam, quæ subtracto inscripti quadrati latere ex dimetiente a c relinquitur, scilicet a r, & sexagesimam partem dupli segmenti maioris eiusdem a r, utpote ipsius a s: hoc est, partes 35, & minuta 52, 16, 31, 45, 16, qualium b d est 120.*

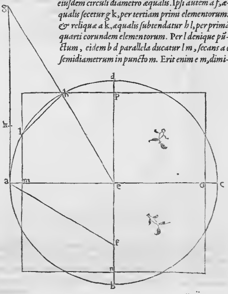


¶SIT RVRSVM DATVS CIRCVLVS A B C D, 4
cuius centrum sit e, atque dimetientes a c & b d, inuicem orthogoni: unà cum inscripti quadrati latere a b. Et diuidatur b e semidiameter per mediam & extremam rationem, seu proportionaliter in puncto f, cuius segmentum maius sit b f, minus uero f e: quod rursum proportionaliter diuidatur in puncto g, cuius segmentum maius sit f g, minus autem g e: quod iterum proportionaliter diuidatur in puncto h, cuius segmentum maius sit g h, minus porrò segmentum proportionale h e, per sæpiùs allegatam 30 sexti elementorum. His ita paratis, *secetur ipsi b g æqualis b* k: *ipsi autem b h æqualis subtendatur b l.* Connectatur demum recta *d* k: *quæ in continuum & directum producatur ad partes* k, *uersus rectam b l, quam secet in puncto m*. Nam *si ex ipsa d m, aut illi æquali, quadratum describatur n o p r: illud æquum erit dato circulo a b c d.* Horum porrò 4 *tetragonismorum circularium fidem faciet ocularis experiētia: & cum præostensis circuli quadraturis euidentissima cōcordia.*

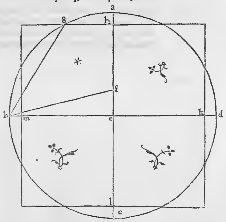
Resumatur



5 ¶RESVMATVR CIRCVLVS A B C D, CVius centrum e, semidiametri uerò a c & b d, in eodem cẽtro ad rectos sese dirimentes angulos. Et diuidatur semidiameter e b proportionaliter in puncto f, cuius segmẽtum maius sit e f, minus autem f b, per 30 sexti elementorum: & connectatur a f linea recta, quæ est latus pentagoni regularis in dato circulo descripti. Per punctum insuper a, ipsi b d parallela ducatur a g, per 31 primi ipsorum elementorum: sitque arcus a h sexta circunferentiæ pars, subtendens dati circuli semidiametrum. Connectatur postmodum semidiameter e h, in directumque producatur ad partes h, uersus g: donec conueniat cum a g recta, in ipsum quidem punctum g. Erit autem a g, latus trigoni regularis in dato circulo descripti: e g autẽ, eiusdem circuli diametro æqualis. Ipsi autem a f, æqualis secetur g k, per tertiam primi elementorum: & reliquæ a k, æqualis subtendatur h l, per primã quarti eorundem elementorum. Per l denique pũctum, eidem b d parallela ducatur l m, secans a e semidiametrum in puncto m. Erit enim e m, dimi-

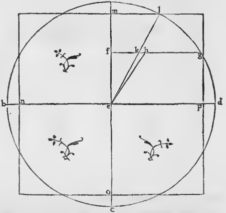


dium latus quadrati ipsi dato circulo aequalis. Fiant itaque e n, e o, e p, eidem e m aequales, & describatur ipsum quadratum m n o p, eidem circulo dato a b c d aequale. ¶ Poterit & idem quadratum, dato circulo aequale, alia ratione colligi, admodum compendiosa atque facili. Exponatur itaque rursum praefatus circulus a b c d, cuius centrum e, & diametri sese in eodem centro orthogonaliter diuidentes a c & b d. Et abscindatur ex a e semidiametro pars 4, per nonam sexti elementorum, qua sit e f. Connectatur deinde recta b f, cui aequalis subtendatur, coaptetúrue b g, per primam quarti ipsorũ elementorũ. Et per punctũ g, ipsi diametro b d parallela ducatur g h, per 31 primi eorundem elementorum. Quoniã e h recta, erit dimidiũ latus quadrati, quod ipsi dato circulo est aequale: fiant igitur e k, e l, e m eidem e h aequales, & compleatur de more ipsum quadratum h k l m, quod ipsi dato aequum est circulo. 6



¶ Aliter rursum circulo dato aequale quadratum colligere licebit: adminiculo uidelicet dimidij lateris trigoni regularis in dato circulo descripti. Sit igitur datus iterum circulus a b c d, cuius centrum e, solitis a c & b d dimetientibus in quatuor quadrantes distributus. Et diuidatur e a semidiameter 7

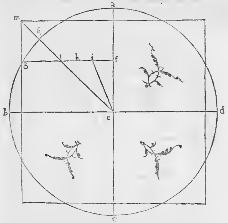
midiameter bifariam in puncto f, per 10 primi elementorum. Per punctum deinde f, ipsi diametro b d parallela ducatur f g, per 31 primi elementorum: quæ est dimidium latus trianguli regularis in dato circulo descripti. Diuidatur consequenter f g recta proportionaliter in puncto h, cuius segmentum maius sit g h, minus uerò h f, per 30 sexti elemētorum. Et cōnectatur e h linea recta: cui æqualis feceturg k, per 3 primi eorūdē elementorū. Per k deinde punctum, educatur semidiameter e k l. Nam si per punctum l, ipsi diametro b d parallela ducatur l m, quæ secet e a semidiametrum in puncto m: erit rursum e m dimidium latus quadrati, quod ipsi dato coæquatur circulo. Describatur igitur ipsum quadratum, sitque m n o p: ut in ipsa continetur figura.



8

¶ *Resumatur sæpius expressus circulus a b c d, cuius centrum e, dimetientésque a c & b d, in eodem centro ad rectos sese diuidentes angulos: unà cum recta f g ducta per medium punctum e a semidiametri, ipsi b d parallela, quæ proportionaliter seu media & extrema ratione diuisa sit in puncto h, cuius segmentum maius sit g h, minus uerò h f: quod rursum*

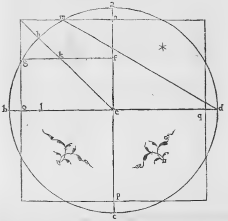
proportionaliter diuidatur in puncto i, cuius ſegmẽtum maius ſit f i, per 30 ſexti elementorum. Sit prętere a circunferentię quadrans a b diuiſus bifariam in puncto k, per 30 tertij eorundem elementorum. Et connectatur e k ſemidiameter, interſecans f g in puncto l. Connexa poſtmodũ e i linea recta, & producto e k ſemidiametro in directum & continuũ uerſus m: ſecetur eidem e i lineę rectę, ęqualis l m. Erit enim recta e m ſemidiameter quadrati, quod ipſi dato circulo a b c d eſt ęquale. Compleatur ergo ſolito more ipſum quadratum, ſitque illud m n o p: ut in figura continetur.



❡ESTO RVRSVM DATVS CIRCVLVS A B *c d, binis dimetientibus a c & b d, in centro e ſeſe orthogonaliter dirimentibus, in quatuor quadrãtes ſolito more diſtributus. Et diſcindatur e a ſemidiameter bifariam in puncto f, per decimam primi elemẽtorum: à quo quidem puncto f, perpendicularis excitetur f g, per undecimam ipſius primi elementorum, quę (uti ſupra diximus) eſt dimidium latus ęquilateri trigoni in dato circulo deſcripti. Diuidatur conſequenter arcus* 9

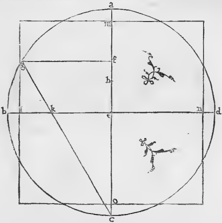
cus

cus a b bifariam in puncto h, per 30 tertij eorundem elementorum: & connectatur e h semidiameter, secans ipsam f g in puncto k. Ipsi autem e k æqualis secetur e l, per 3 ipsius primi elementorum: & toti d l æqualis subtendatur d m, per primam quarti ipsorum elementorum. Per punctum deinde m, dimetienti b d parallela ducatur n o, per 31 primi supradictorum elementorum: quæ secet ea semidiametrum in puncto n. Nam recta e n, erit rursum dimidium latus quadrati, quod ipsi dato circulo a b c d est æquale: Describatur igitur ipsum quadratum, ut in præmissis obseruatum est circuli quadraturis, sitque illud rursum n o p q: ut in ipsa figura continetur.



10 ¶EXPONATVR RVRSVM OB OCVLOS *datus circulus a b c d, unà cum sæpiùs expressis dimetientibus a c & b d, in centro e ad rectos sese inuicem dirimentibus angulos: & ipsa perpendiculari f g, per medium punctum ipsius e a semidiametri, ipsi b d parallelè descripta. Et diuidatur e f quarta pars diametri a c, per*

mediam & extremam rationem, seu proportionaliter in puncto h, cuius segmentum maius sit e h, minus uero h f, per sæpiùs allegatam 30 sexti elementorum. Connectatur deinde recta g c, latus uidelicet trianguli æquilateri in dato circulo descripti, diuidens semidiametrum e b in puncto k. *Ipsi postmodum segmento e h, æqualis secetur* k l, *per 3 primi eorundem elementorum. Erit nanque recta e l dimidium latus quadrati, quod ipsi dato æquum est circulo. Fiant igitur e m, e n, e o, eidem e l atque inuicem æquales, & describatur ipsum quadratum l m n o: ut in ipsa licet intueri figura.*



¶*Has porrò compendiarias circuli quadraturas, præostensis atque numeris confirmatis circuli quadraturis, adamussim conuenire, ipsa te docebit experientia: quapropter illas quàm breuissima potuimus traditione perstringere libuit, absque uidelicet ampliori demonstrationis examine: id enim in iniustum atque odiosum uolumen producere foret operæpretium. Si quis autem morosus Orontiomastix, his minimè contentus fuerit, aut ferat, aut meliores (si possit) excogitet.*

Propositio

PROPOSITIO XV.

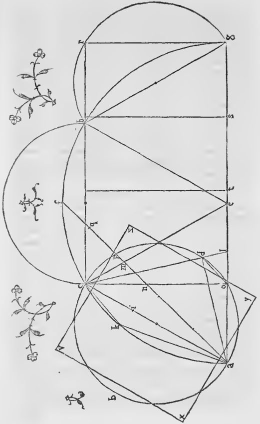
PRæfatum circulum, in quadratum æquale, admi-
niculo trium lunularum hexagonarum, multifa-
riam reuocare.

1 ¶LVNVLA HEXAGONA DICITVR, FIGV-
ra curuilinea, sub sexta circunferentiæ dati circuli parte, & dimidia
circunferentia eius circuli, qui describitur super hexagoni latus, com-
prehensa. Haud *aliter diffinienda est trigona, atque tetragona lunula.*
Sit *igitur datus circulus a b c d, cuius dimetiens sit a c: & super ipso di-*
metiente, triangulum æquilaterum describatur a c e, per primam libri
primi elementorum. Producto *insuper a e latere in directum & conti-*
nuum, ad partes quidem e, circum e centrum, ad interuallum autem ip-
sius e a, semicirculus describatur a f g, cuius dimetiens sit a g. Ipsi *post-*
modum a e uel a c, æquales subtendantur c h & h g: super quibus descri-
2 *bantur semicirculi, ipsi a b c dimidio circulo æquales.* ¶ His *ita constru-*
ctis, manifestum est rectilineum a c h g, fore dimidium hexagoni regu-
laris, in circulo cuius dimetiens est a g descripti. Aio *itaque primùm, ip-*
sum rectilineum a c h g, æquum esse tribus lunulis hexagonis, extra
circunferentiam a f g comprehensis: & ipsi præterea semicirculo a d c.
Q*uadratũ enim quod ex a g describitur, quadruplum est eius quadra-*
ti, quod fit ex a c, uel a e semidiametro. Vt *quadratum autem ad qua-*
dratum, sic circulus ad circulum, per 2 duodecimi elementorum: atque
per 15 quinti eorundem elementorum, semicirculus ad semicirculum.
Q*uadruplus est igitur semicirculus a f g, ipsius semicirculi a b c: & pro-*
inde quatuor semicirculis, super a c, c h & h g lineis rectis descriptis æ-
quale. Quorum *partes utrisque, & a c h g rectilineo, & tribus semi-*
circulis communes, sunt tres circuli sectiones, sub a c, c h, h g lineis rectis,
& sexta circunferentiæ parte comprehensæ: quibus ablatis, relinque-
tur dimidium hexagonum a c h g, tribus lunulis super a c, c h, h g cir-
cunferentiis descriptis, & dimidio circulo a d e æquale. Subducta
ergo trium lunularum quantitate, ex ipso dimidio hexagono: quod inde
relinquetur, æquum erit ipsi dimidio circulo a d c. ¶Reliquum *est itaque*
3 *inuenire rectilineum, quod uni trium prædictarum lunularum sit*

æquale. Hoc autem multiplici, & planè diuino colligere docebimus artificio. In primis enim si ex a c dati circuli dimetiente, tertia pars abscindatur, per nonam sexti elementorum, quæ sit c i, cui æqualis subtendatur c k, & connectatur a k linea recta: ipsi postmodum a k æqualis secetur a l, & connectatur c d l linea recta: Erit triangulum a c l, æquũ lunulæ hexagonæ a b c, cuius basis est arcus a b c, sexta uidelicet pars circunferentiæ. ¶ Vel in hunc modum colligi poterit eadem a l. *Subtendatur latus quadrati, in dato circulo cuius dimetiẽs est a g descripti, sitque illud a f, cuius intersectio cum latere c e trianguli æquilateri a c e, sit punctum m. Ipsi deinde e m lineæ rectæ, æqualis coaptetur, subtendaturue c d, per primam quarti elementorum.* Nam eadem c d in directum *continuata, ad partes quidem ipsius d, cadet in ipsum punctum l: efficiẽtque rursum triangulum præmemoratum a c l, ipsi lunulæ hexagonæ a b c æquale.* ¶ Aut *(si libuerit) ipsi e m æqualis secetur f n, residuæ postmodum a n, æqualis subtendatur a d, per ipsam primam quarti elementorum.* Nam connexa c d linea recta, & in directum producta ad *partes ipsius d, coincidet rursum in ipsum punctum l: eritque propterea triangulum a c l, præfatæ lunulæ hexagonæ (ueluti supradictum est) æquale.* ¶ Adde, quòd notata *sectione a e semidiametri, cum peripheria dati circuli a b c d, quæ sit punctum o: si pars lateris a f, extra præfatum circulum a b c d reperta, utpote f p, bifariam diuidatur in puncto q, & dimidiæ parti f q æqualis subtendatur o d, & connectatur recta c d, in directumque (uelut antea) producatur ad partes d: coincidet rursum eadem c d in sæpiùs memoratum punctum l.* 4 5 6

¶NEC PRAETEREVNDVM EST, TERTIAM *partem ipsius a m lineæ rectæ, efficere adamussim rectam e l, quæ est supplementum ipsius a l. Abscindatur ergo ex ipsa a m pars tertia, per nonam sexti elementorum: cui postmodum ex a e semidiametro æqualis secetur e l, & connectatur c l efficiens triangulum a c l. Vnoquoque igitur horum quinque modorum, colligetur recta a l, ipsumue triangulum a c l, idque sub eadem figura contextura, ex ipsis nempe lateribus a c uel c e, & a f: artificium profectò admiratione non indignum. Hinc manifestum est rectam a f, latus uidelicet inscripti quadrati, continere præcisè a d & d c latera, rectum angulum qui ad optatum punctum d conficientia.* 7

¶Quod



¶QVOD AVTEM IPSVM TRIANGVLVM A 8 c l quocunque antecedentium quinque modorum descriptum, lunulæ hexagonæ sit æquale, fidem faciet quæ inde subsequitur ipsius dati circuli quadratura. Deducatur igitur perpendicularis c o, per 12 primi elementorum: quæ triangulum æquilaterum a c e, atque semidiametrum a c bisariam diuidet in ipso puncto o. Et producta c h in continuum & directum uersus r, per punctum g eidem c o parallela ducatur g r, per 31 primi elementorum: compleatúrque parallelogrammum rectangulum c o r g, ipsi dimidio hexagono a c h g prorsus æquale. Discinditur enim dimidium hexagonum a c h g, in tria tringula æquilatera atque inuicem æqualia: & unius trianguli area, utpote, area ipsius trianguli a c e, sub dimidia basi & ipsa perpendiculari continetur, per 41 primi elementorum. Et proinde area tripli eiusdem trianguli, sub ipsius dimidiæ basis triplo, cuiusmodi est ipsa o g, & eadem perpendiculari de necessitate comprehenditur. Aequum est itaque rectangulum c o r g, ipsi dimidio hexagono a c h g. Haud dissimiliter, si secta fuerit o s basis, quæ dimidiam basin a l præfati trianguli a c l ter comprehendat, & per punctũ s ducta fuerit linea recta eidem perpendiculari c o parallela: fiet rectangulum parallelogrammum c s, triplo ipsius trianguli a c l, & proinde præfatis tribus lunulis hexagonis æquale. Residuum itaque parallelogrammum rectãgulum r s, semicirculo a d c de necessitate coæquabitur. Fiat igitur s t, æqualis ipsi g s: & per ipsum punctum t, ipsi g r parallela ducatur, compleatúrque rectãgulum r t, duplum ipsius r s: & dato propterea circulo a b c d æquale. Inueniatur tandem latus quadrati eidem parallelogrammo r t æqualis, per ultimam secundi elementorum, sitque illud u x: ex quo describatur quadratum u x y z, per 46 primi eorundẽ elementorum. Ipsum enim quadratum u x y z, eidem circulo dato a b c d præcisè coæquabitur. Nam si per antecedentem sextam, aut aliam quãuis succedentem propositionem, ipsi dato circulo a b c d, æquale quadratum describatur: illud eidem quadrato u x y z adamussim conuenire ipsa te docebit experientia. Dato itaque circulo a b c d, descriptum est æquale quadratum u x y z: quod faciendum receperamus.

¶Idem aliter, officio uidelicet numerorum.

¶SED NE HABEAS QVO SVBMVRMVRARE 1 possis, iuuat idem quadratum dato circulo equale, uia numerali rursum colligere.

colligere. Fiat igitur recta a l, quæ basis est trianguli a c l, partium 41, & minutorum 51,55,0,28, 53, 21, qualium uidelicet partium diameter a g est 120, & pars qualibet minutorum 60: Coincidet enim finis huiuscemodi partium, atque minutorum, in ipsum punctum l, quinque modis antea declaratis adinuentum: ut ipsa te docebit experientia, & ea quæ inde subsequetur dati circuli quadratura confirmabit. Colligitur autem præfata basis a l ipsius trianguli a c l, ex segmentis proportionalibus semidiametri a e uel a c (eo quidem modo, & ordine distributis, ut antecedenti propositione tertia huiusce libri secundi tradidimus) quemadmodum in subscripta numerorum tabella continetur.

		ptes.	m.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Segmentū maius semidiametri	i.	37	4	55	20	29	39	7	0	0	0	0
Dimidium segmenti	iiij.	4	22	36	59	15	31	19	30	0	0	0
Dimidium segmenti	ix.	0	23	40	48	24	4	59	0	0	0	0
$\frac{1}{4}$ *segmenti ordine*	xv.	0	0	39	35	21	55	17	30	0	0	0
$\frac{1}{60}\frac{1}{2}$ *segmenti*	xiiij.	0	0	2	8	21	27	41	10	0	0	0
$\frac{1}{60}\frac{1}{2}$ *segmenti*	xvi.	0	0	0	8	9	21	7	39	15	0	0
$\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{6}$ *segmenti*	xv.	0	0	0	0	26	23	34	36	51	40	0
$\frac{1}{75}\frac{1}{50}\frac{1}{60}\frac{1}{2}$ *segmenti*	xvij.	0	0	0	0	0	30	14	37	4	39	30
¶ *Horum summa, seu recta*	a l.	41	51	55	0	28	53	21	3	11	19	30

2 ¶AREA ITAQVE CIRCVLI, CVIVS DIAmeter *est partium 120, habet partes 11307, & minuta 41,32,18,26, per antecedentem sextam propositionem: & proinde semicirculus a f g, erit partium 5653, & minutorum 50,46,9,13. Sexta uerò pars eiusdem circuli, utpote a k c e, habet partes 1884, & minuta 36,55,23, 4, 20. Perpendicularis autem c o, offenditur esse partium 51, & minutorum 57, 41,46,4: qualium partium unumquodque latus trianguli a c e suppositum est 60. Et proinde area ipsius trianguli a c e, habet partes 1558, & minuta 50,44,37. Quibus detractis ex sexta circunferentiæ parte a k c e, relinquitur sectio eiusdem circuli, cuius sectionis basis est a c, partium quidem 325, & minutorum 46,10,46,4,20. Et quoniam semicirculus a f g, præostensus est quadruplus ipsius semicirculi a b c, & proinde quartæ partis semicirculi a f g, quæ est partium 1413, & minutorum 27, 41,32,18, 15: Si auferatur sectio a k c, cuius basis est a c, ex præfato semicirculo a b c, relinquetur lunula hexagona a b c, cuius basis*

eſt a k c, partium quidem 1087, & minutorum 41, 30, 46, 13, 55. Tantum quoque aio fore triangulum a c l. Cùm enim triangula a c e, a c l, ſub eodem ſint uertice: ſe habent igitur ut baſes a e & a l, per primam ſexti elementorum. Sicut igitur baſis a e ad baſin a l, ſic triangulum a c e ad triangulum a c l. Ducendo itaque ſecundum in tertium, & productum diuidendo per primum, hoc eſt, multiplicando partes 1558, & minuta 50, 44, 37, ipſius trianguli a c e, per partes 41, & minuta 51, 55, 0, 28, 53, 21 ipſius baſis a l, & productum diuidendo per 60 partes ipſius a e: fiet quartum, hoc eſt, triangulum a c l, partium quidem 1087, & minutorum 41, 30, 46, 13, 55: deſunt enim tantummodo ſexta minuta circiter 20, quæ faciunt $\frac{1}{14544000000}$ *unius partis integræ, uicio non quadratarum radicum, irrationaliúmue ſegmentorum ipſius a e ſemidiametri, de neceſsitate tribuendum. Ter autem 1087 partes, & minuta 41, 30, 46, 13, 55, quæ tres præfatas lunulas hexagonas repræſentant, efficiunt rectangulum c s, partium quidem 3263, & minutorum 4, 32, 18, 41, 45. Quibus ſubductis ex triplo trianguli a c e, aut (ſi mauis) ex rectangulo c o r g, ex partibus uidelicet 4676, & minutis 32, 13, 51 relinquentur partes 1413, & minuta 27, 41, 32, 18, 15 ipſius rectanguli r s: quæ duplata, conficiunt rectangulum r t, partium 2826, & minutorum 55, 23, 4, 36, 30. Sed totidem partium, atque minutorum, eſt datus circulus a b c d: facit enim quartam partem totius circuli, cuius diameter eſt a g partium 120, qui præoſtenſus eſt habere partes 11307, & minuta 41, 32, 18, 26. Radix porrò quadrata ipſarum 2826 partium, & minutorum 55, 23, 4, 36, 30, offenditur eſſe partium 53, & minutorum 10, 7, 44, 25. Tantum eſt latus u x, ipſius quadrati u x y z: quod ipſi dato circulo a b c d prædiximus æquale. Eſt autem u x, dimidium latus quadrati, quod circulo dati circuli a b c d quadruplo coæquatur. Quod quidem latus, inuentum eſt habere partes 106, & minuta 20, 15, 28, 50: quæ bis continent ipſas partes 53, & minuta 10, 7, 44, 25. Id porrò nullo modo poſſet euenire, ni ſupradictum triangulum a c l, ipſi lunulæ hexagonæ eſſet æquale. Dato itaque circulo a b c d, deſcriptum eſt æquale quadratum u x y z: idque trium lunularum hexagonarum adminiculo. Quod numeris confirmandum fuerat.*

Supradicta-

Supradictarum supputationum compendiosa formula.		
	partes.	m̄. 2̄. 3̄. 4̄. 5̄. 6̄. 7̄.
Diameter a e g.	120	0. 0. 0. 0. 0. 0.0
Semidiameter a c, uel a c.	60	0. 0. 0. 0. 0. 0.0
Area circuli, cuius diameter est a g.	11307	41. 32. 18. 26. 0. 0.0
Semicirculus a f g.	5653	50. 46. 9. 13. 0. 0.0
Eiusdem circuli pars — *Quarta.*	2826	55. 23. 4. 36. 30. 0.0
Eiusdem circuli pars — *Sexta.*	1884	36. 55. 23. 4. 20. 0.0
Eiusdem circuli pars — *Octaua.*	1413	27. 41. 32. 18. 15. 0.0
Perpendicularis c o.	51	57. 41. 29. 14. 0. 0.0
Basis c l trianguli a c l.	41	51. 55. 0. 28. 53. 21.0
Triangulum æquilaterum a c e.	1558	50. 44. 37. 0. 0. 0.0
Sectio circuli a k c.	325	46. 10. 46. 4. 20. 0.0
Lunula hexagona a b c.	1087	41. 30. 46. 13. 55. 0.0
Triangulum a c l.	1087	41. 30. 46. 13. 55. 0.0
Rectilineum a c h g, seu rectangulũ c o r g.	4676	32. 13. 51. 0. 0. 0.0
Tres lunulæ, seu rectangulum c s.	3263	4. 32. 18. 41. 45. 0.0
Rectangulum residuum r s.	1413	27. 41. 32. 18. 15. 0.0
Rectangulum r t, dato circulo æquale. ¶	2826	55. 23. 4. 36. 30. 0.0

PROPOSITIO XVI.

IDem rursum quadratum dato circulo æquale, unica hexagona, cum trigona lunula opitulante, multis itidem modis reddere notum.

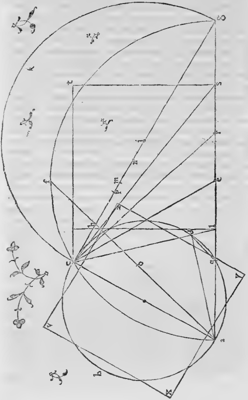
1 ¶SIT RVRSVM DATVS CIRCVLVS A B C, *cuius diameter a c: super quo fiat triangulum æquilaterum a c e, & compleatur semicirculus a f g, cuius diameter sit a g, unà cum inscripti quadrati latere a f: ueluti proxima obseruatum fuit propositione. Connectatur postmodum recta c g, quæ secet eandem a f in puncto h. Erit itaque diameter a c, latus hexagoni: c g uerò latus trigoni regularis, in dato circulo (cuius dimetiens est a g) descripti. Diuidatur ergo c g bifariam in puncto i: & centro i, ad interuallum i c uel i g, describatur semicirculus c k g.*

2 ¶HIS ITA CONSTRVCTIS, MANIFESTVM *est in primis, quadratum quod fit ex a g, æquum esse duobus quadratis,*

*quæ fiunt ex a c & c g, per 47 primi elementorum : rectus est enim an-
gulus qui sub a c g, per 31 tertij eorundem elementorum . Sicut porrò se
habent dimetiētium quadrata, sic & circuli, per 2 duodecimi prædicto-
rum elementorum: & ipsi pendenter semicirculi adinuicem, per 15 quin-
ti eorundem elementorum. Semicirculus itaque a f g, duobus semicirculis
a b c & c k g est æqualis. Detractis porrò sectionibus, eisdem semicircu-
lis communibus, remanent duæ lunulæ super sextam, atque tertiam cir-
cunferentiæ partem descriptæ, æquales triangulo rectilineo a c g. Vtri-
que igitur prædictarum lunularum, æquale triangulum ex ipso a c g,
triangulo separetur.*

¶IN PRIMIS QVIDEM IPSI LVNVLAE HE- 3
*xagonæ triangulum æquale describatur a c l, per aliquem sex antecedē-
tium modorum proxima propositione declaratorum: nam reliquū triā-
gulum l c e, ipsi lunulæ trigonę de necessitate coæquabitur. ¶ Vel in 4
hunc modum. Diuidatur h i recta bifariam in puncto m, per 10 pri-
mi elementorum : & ipsi h m uel m i æqualis secetur e l, connectātur-
que recta a c l. Fiet enim præfatum triangulum a c l, lunulæ hexagonæ
a b c indubitanter æquale. ¶ Aut si libuerit, auferatur semidiameter 5
e g ex ipso latere trigoni g c : & residuæ utpote c n, æqualis subtendatur
c d. Producta nanque eadem c d, ad partes d in continuum & dire-
ctum, cadet in ipsum priùs inuentum punctum l.*

¶IDEM QVOQVE SVBSEQVETVR, SI EX 6
*a f, eidem c n æqualis secetur f o : atque residuæ a o, æqualis subten-
datur a d. Nam connexa c d linea recta, in directúmque producta, coin-
cidet rursum in punctum l: fiétque præfatum triangulum a c f, æquale
eidem lunulæ hexagonæ. ¶ In idem quoque redibit, si diuisa fuerit h i 7
proportionaliter in signo p, cuius segmentum maius sit p i, minus uerò
p h : cui si æqualis subtendatur d q, ab ipso uidelicet puncto in quo cir-
cunferentia dati circuli a b c d secat a e semidiametrum. Quoniam si cō-
nexa fuerit c d linea recta, & in directum continuata, coincidet rur-
sum in ipsum punctū l. ¶ Habes itaque non sine perpetua admiratione, 8
unūquemque horum quatuor modorum colligendi basin a l ipsius triā-
guli a c l, cum unoquoque sex modorum ipsius antecedentis xiij proposi-
tionis adamussim conuenire. Reliquum itaque triangulum l c e, ut re-
deamus*



deamus unde sumus digressi, lunulæ trigonæ c k g, æquum erit. Præostẽsum est autem, triangulum a c e, æquum esse præfatæ lunulæ hexagonæ a b c, & tertiæ parti semicirculi a d c, quæ est triangulum l c e. Et quoniam triangulum c e g, eidem triangulo a c e, per 38 primi elementorum est æquale: illud æquum itidem erit uni lunulæ hexagonæ, atque tertiæ parti eiusdẽ semicirculi a d c. Secetur igitur e r ipsi e l æqualis, & cõnectatur c r linea recta: Reliqua *propterea r g, reliquæ a b erit ęqualis: & ipsum propterea triangulum c r g æquale triangulo a c l, & uni consequenter lunulæ hexagonæ æquale.* Et *proinde reliquum triãgulum e c r, uni tertiæ parti sæpius nominati semicirculi a d c æquum erit.* Triangu*lum itaque l c r, duo tertia eiusdem semicirculi comprehendet.* Fiat *igitur r s, ipsi l e uel e r æqualis: & per punctum c, ipsi dimetienti a g acta parallela c t, excitentur à punctis l & s, super eadem a g perpendiculares, compleatúrque parallelogrammum rectangulum t l.* Si *connectatur ergo c s linea recta, erit triangulum c r s, unum tertium semicirculi a d c: & totum proinde triangulum l c s, æquale semicirculo a d c.* Cùm *autem triangulum & parallelogrammum eandem basin habuerint, in eisdémque fuerint parallelis, ipsum parallelogrammum trianguli duplũ est, per 41 primi elementorum.* Parallelogrammum *itaque t l duplum est trianguli l c s: & ipsi propterea dato circulo æquale.* Inueniatur *ergo tandem media proportionalis inter l s & s t latera, seu latus quadrati eidem parallelogrammo t l æqualis, per ultimam secundi elementorum, quæ sit rursum u x: ex qua describatur quadratum u x y z, utrique & parallelogrammo rectangulo t l, & ipsi dato circulo a b c d æquale.* Q*uod autem ipsum quadratum u x y z, eidem circulo dato sit æquale, ipsa te docebit experientia.* Nam *si per sextam, aut aliquam antecedentium propositionum huius secundi libri, quadratum eidem circulo dato collegeris æquale: id nunc descripto quadrato u x y z adamussim coæquabitur.* Dato *proinde circulo a b c d, datum est æquale quadratum u x y z: quod rursum officio unius lunulæ hexagonæ, cum ipsa trigona, fecisse oportuit.* ¶*Quadratum igitur quod ex a g dimetiente, sesqui-* 9
tertium est eius quod ex c g: & idem quadratum quod ex c g, triplum eius quod fit ex a c. Lunula *insuper hexagona, ad lunulam trigonam se habet, ut basis a l ad basin l s: nempe ut triangulum a c l, ad ipsum triangulum l c s.*

Idem

¶Idem uia numerorum confirmare.

1 ¶POTERIT ET IDEM QVADRATVM DAto circulo æquale alia ratione, nempe uia numerorum (ut proxima factum est propositione) confirmari. Cùm enim basis a l trianguli a c l, præostensa sit habere partes 41, & minuta 51,55,0, 28,53, 21, qualium partium semidiameter a e est 60, totúsue diameter a g 120: Reliqua propterea l e, basis uidelicet trianguli c l e, erit partium 18, & minutorum 8,4,59,31,6,39. Et proinde basis l s trianguli c l s (quæ tripla est ipsius l e) habebit partes 54, & minuta 24,14,58,33,19,57: quæ ducta in perpendicularem s t, quæ est æqualis ei quę ex uertice c in basin a e ducitur, & habet partes 51, & minuta 57,41,29,14, faciunt aream parallelogrammi rectanguli t l, & proinde aream ipsius a b c d circuli dati: partium quidem 2826, & minutorum 55,23,4,36, 30 ferè: abundant enim solummodo 2 quinta ferè minuta, quæ reuocantur ad $\frac{2}{388800000}$ unius integræ partis, ex calculi diuersitate contractum, & nihili propterea faciendum. Sed totidem partium atque minutorum est quarta pars circuli, cuius diameter est a g: & proinde area ipsius a b c d circuli dati.

2 ¶VEL IN HVNC MODVM, IDEM COLLIGEre licebit. Præostensum est antecedenti 13 propositione, triangulum a c e habere partes 1558, & minuta 50,44,37: Triangulum uerò a c l, fore partium 1087, & minutorum 41,30,46,13,55. Reliquum itaque triangulum c l e, habebit partes 471, & minuta 9,13,50, 46,5, quæ faciunt tertiam partem semicirculi a d c: & proinde sexies sumpta, conficiunt totum circulum datum a b c d, partium quidem 2826, & minutorum 55,23,4,36, 30 præcisè: quantum uidelicet offendimus eundem circulū, per trium hexagonarum lunularum subtractionem.

3 ¶Vtroque igitur modo, habetur area ipsius dati circuli a b c d: & proinde latus quadrati eidem circulo æqualis. Quod præfata 13 propositione, inuentum est habere partes 53, & minuta 10,7, 44,25: dimidium uidelicet lateris eius quadrati, quod æquum est circulo, cuius diameter est a g. Hæc autem prædictarum supputationum concordia, per triangulum uidelicet a c l, aut per ipsum triangulum c l e, fidem facit apertam exactæ, atque multifariam traditæ descriptionis ipsius trianguli a c l, quod hexagonę lunulę adęquetur.

¶ *Antecedentis calculi summaria formula.*								
	partes	m̄.	2̄.	3̄.	4̄.	5̄.	6̄.	7̄.
¶ *Semidiameter a e.*	60	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0
Basis a l trianguli a c l.	41	51.	55.	0.	28.	53.	21.	0
Reliqua basis l e.	18	8.	4.	59.	31.	6.	39.	0
Basis l s trianguli c l s.	54	24.	14.	58.	33.	19.	57.	0
Perpendicularis s t.	51	57.	41.	29.	14.	0.	0.	0
¶ *Rectangulum t l, æquale circulo a b c d.*	2826	55.	23.	4.	36.	30.	0.	0
Triangulum a c e.	1558	50.	44.	37.	0.	0.	0.	0
Triangulum a c l, hexagonæ lunulæ æquale.	1087	41	30.	46.	13.	55.	0.	0
Triangulum c l e, sexta pars circuli dati.	471	9.	13.	50.	46.	5.	0.	0
¶ *Sextuplũ eiusdẽ trianguli, seu rectang. t l.*	2826	55.	23.	4.	36.	30.	0.	0
Triangulum a c g, duabus lunulis æquale.	3117	41.	29.	14.	0.	0.	0.	0
Triangulum c l g, lunulæ trigonæ æquale.	2029	59.	58.	27	46.	5.	0.	0
Lunula autem tetragona habet.	1800	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0

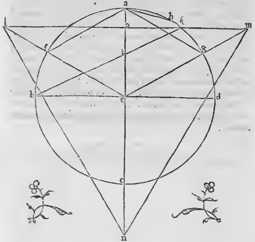
PROPOSITIO XVII.

Circulum datum in triangulum æquilaterum eidẽ circulo æquale tribus modis reducere: & triangulum demum, in quadratum.

¶NON ABSVRDVM TANDEM ANNECTERE, *qua ratione circulus datus in triangulum æquilaterum & æquiangulum, in primam uidelicet rectilinearum atque regularum figurarum transmutetur. Ipsius nanque trianguli adminiculo, præfatus circulus in quadratum æquale uel facilè reuocabitur. Sit igitur datus circulus a b c d, cuius centrum e, dimetientes uerò a c & b d, in eodem centro ad rectos angulos sese dirimentes. Subtendantur postmodum a f & a g lineæ rectæ, ipsi a e semidiametro æquales, per primam quarti elementorum: in hunc quidem modum, ut uterque arcus a f & a g, sextam circunferentiæ partem comprehendat. Diuidatur rursum arcus a g bifariam, in puncto h: & connectatur a h subtensa chorda, cui æqualis secetur a i, per 3 primi eorundẽ elementorũ. Connectatur postmodũ b i linea recta, in directũmque producatur ad circunferentiæ punctum* k. *Per ipsum deinde punctum* k, *ipsi dimetienti b d parallela ducatur l m, per 31 ipsius primi elementorum: quæ conueniat cum e f & e g semidiametris, in directum itidem continuatis, ad puncta l & m. Super recta tandem*

l m,

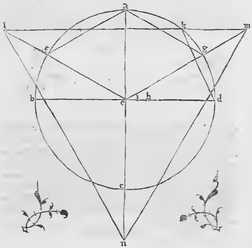
l m, triangulum æquilaterum describatur l m n: per primam ipsius primi elementorum: producto e c semidiametro in punctum n, notataque sectione lateris l m cum a e semidiametro, quæ sit o.



¶*His ita constructis, aio triangulum æquilaterum l m n, æquum esse dato circulo a b c d. Nam si inter n o perpendicularem, & dimidium latus o l, media proportionalis inueniatur, per 13 sexti elementorum: ea erit latus quadrati, ipsi triangulo æquilatero l m n æqualis. Idem porrò latus, simul erit latus quadrati, quod per sextam, aut aliam quamuis antecedentium propositionum, ipsi dato circulo colligetur æqualis: ut ipsa te docebit experientia. Datus itaque circulus a b c d, & triangulum l m n, eidem quadrato, uel æqualibus quadratis erunt æqualia: & proinde æqualia adinuicem.*

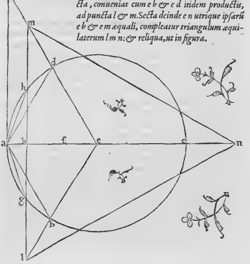
¶Idem aliter.

¶ESTO RVRSVM DATVS CIRCVLVS A B 2
c d, cuius centrum e, unà cum subtensis chordis a f & a g, ipsi a e semidiametro æqualibus, & connexis e f & e g semidiametris: ut in proxima obseruatum extitit figura. dimetiens itaque b d proportionaliter, seu media & extrema ratione diuidatur in puncto h: & segmentum e h iterum proportionaliter in puncto i, cuius segmentum maius sit e i, minus uerò i h, per 30 sexti elementorum. Subtendatur postmodum ipsi d i æqualis d k, per primam quarti ipsorum elementorum. Et per idem punctum k, ipsi diametro b d parallela ducatur l m, per 31 primi eorundem elementorum: quę rursum conueniat cum e f & e g semidiametris, in directum continuatis, ad ipsa puncta l & m. Et compleatur triangulum ęquilaterum l m n, & reliqua quę sunt in figura: ut in proxima dictum est circuli triangulatura. Hoc itaque triangulum ęquilaterum l m n, ipsi dato circulo a b c d æquum esse, pari quo priùs argumento conuincetur.



¶Idem rursum aliter, beneficio numerorum.

3 ¶QVOD SI IVVET IDEM TRIANGVLVM *æquilaterum, uia numerorum inuestigare, sic facito. Esto rursum datus circulus a b c d, cuius centrum e, unà cum solo dimetiente a c, & subtensis a b & a d, connexisque e b & e d semidiametris, sextam circunferentiæ partem subtendentibus. Abscindatur postmodum tertia pars ipsius dimetientis, per nonam sexti elementorum, quæ sit a f: cui addatur unius* 40 *partis ipsius a f pars sexagesima, atque ipsius partis sexagesimæ* $\frac{11}{20}$, *&* 13 *præterea sexagesima unius sexagesimæ partis eiusdem partis sexagesimæ, unà cum* $\frac{2}{3}$ *sexagesimæ partis unius prædictarum* 13 *sexagesimarum: hoc est* 1 *primum minutum,* 33 *secunda,* 13 *tertia, &* 40 *quinta. Et inde resultanti lineæ rectæ, æquales coaptentur a g & a h: & connectatur g h linea recta, cum diametro a c orthogona, quæ ad utrasque partes directè producta, conueniat cum e b & e d itidem productis, ad puncta l & m. Secta deinde e n utrique ipsarũ e b & e m æquali, compleatur triangulum æquilaterum l m n: & reliqua, ut in figura.*



¶HIS ITA CONSTRVCTIS, AIO IPSVM *triangulum æquilaterum* l m n, *æquum esse dato circulo* a b c d. *Sit enim de more diameter* a c *partium* 120 : *erit igitur* a f *similium partium* 40, *quæ unà cum præfatis minutis efficiunt* 40,1,33,13, 0, 40. *Tanta est igitur utraque ipsarum* a g & a h. *Secet autem* g h *aut* l m, *dimetientẽ* a c *in puncto* k. *Et quoniam* g k *perpendicularis est super* a c : *erit igitur* a g *recta, media proportionalis inter* c a & a k, *per corollarium* 8 *sexti elementorum. Si ducatur ergo* a g *in seipsam, & productum diuidatur per* a c : *nascetur* a k. *Quadratum porrò ipsius* a g, *habet partes* 1602, & *minuta* 4,19,45,42,42,53, 17, 20, 26, 40 : *quæ diuisa per* 120 *partes ipsius* a c, *dant pro quoto numero partes* 13, & *minuta* 21,2, 9,52,51,21,26,38,40,13, 20. *Tanta est igitur eadem* a k : & *residua proinde semidiametri, uidelicet* e k, *habebit partes* 46, & *minuta* 38, 57,50,7,8,38,33,21,19,46,40. ¶ *His præmissis, per datum punctum* a, *ipsi* l m *parallela ducatur* a o, *per* 31 *primi elementorum, quæ conueniat cum* e m *directè producta in ipsum punctum* o. *Et quoniam* e a o & e k m *triangula sunt inuicem æquiangula (ut ex* 29 *primi elementorum sit manifestum) erit per quartam sexti eorundem elementorum, ut* e a *ad* a o, *sic* e k *ad ipsam* k m. *Est autem* a o *partium* 103, & *minutorum* 55,22, 58, 28, *qualium præfatus diameter* a c *est* 120 : *nempe æqualis lateri trianguli æquilateri in eodem circulo descripti. Ducenda est igitur* a o, *in* e k, *fient partes* 4847, & *minuta* 56,51,47, 51, 50, 12, 17, 36, 45, 44 : *quæ diuisa per* 60 *partes* e a *semidiametri, reddunt partes* 80, & *minuta* 47,56,51,47, 52 *ferè: (nullus enim subsequetur error, si reliqua minutiorum fractionum omittatur multitudo.) Tanta est igitur ipsa* k m : & *tota proinde* l m, *erit partium* 161, & *minutorum* 35,53,43,35,43, 40. *Quorum quadratum habet partes* 220513, & *minuta* 59, 48,26,44,34,24,22,31,48, 26,46, 40. *Tantum est propterea quadratum ipsius* m n, *cùm eidem* l m *sit æqualis. A quo quidem quadrato, si auferatur quarta pars, utpote partes* 6528, & *minuta* 29, 57, 6, 41,8,36, 5, 37, 57, 6, 41, 40, *auferetur potestate quadratum ipsius* k m: *Et proinde relinquetur quadratum ipsius perpendicularis* n k, *per* 47 *primi elementorum, partium quidem* 19585, & *minutorum* 29, 51, 20, 3, 25, 48, 16, 53, 51, 20, 5. *Quorum radix quadrata, habet partes* 139, & *minuta* 56, 53, 30, 21, 31 *ferè: tanta est igitur ipsa perpendicularis* n k. *Ex ductu autem perpendicularis* n k,

in ipsam

in ipsam k *m, sit area trianguli l m n, per 41 primi elementorum: partiũ quidem 11307, & minutorum 41, 32, 18, 25 ferè.* Atqui *totidem partiũ, atque primorum, secũdorum, & tertiorum minutorum, reperta est area circuli, cuius diameter est partium 120, per sextam propositionem huius secundi libri: sed quartorum minutorum 26.* Differentia *est igitur, unius propemodum quarti minuti: quod ad* $\frac{1}{12960000}$ *unius integræ partis reuocatur, nihili prorsus faciendum, si calculi diuersitas, atque irrationalium radicum natura debitè consideretur.* ¶ Radix *porrò quadrata ipsarum partium 11307, & minutorum 41, 32, 18, 26, est media proportionalis inter ipsam perpendicularem n* k *& dimidium latus* k *m, & simul latus quadrati eidem æquilatero triangulo l m n, & ipsi propterea circulo dato æqualis.* Hæc *autem offendetur esse partium 106, & minutorum 20, 15, 28, 50, quanta uidelicet ex antecedentis & præallegatæ sextæ propositionis inuenta est calculo. Dato itaque circulo a b c d, non modo triangulum æquilaterum, sed & quadratum æquale simul describitur.* Quod *oportuit fecisse.*

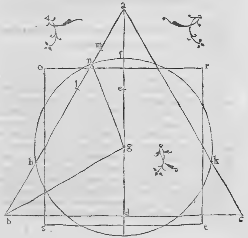
PROPOSITIO XVIII.

TRiangulo æquilatero dato, circulum eidem triangulo æqualem, uersa uice describere.

1 ¶SIT DATVM TRIANGVLVM AEQVILA*terum a b c, cuius perpendicularis ex a uertice in basin b c deducta sit a d.* Hæc *igitur perpendicularis a d, proportionaliter seu media & extrema ratione diuidatur in puncto e, cuius segmentum maius sit d e, minus uerò e a: quod rursum proportionaliter diuidatur in puncto f, cuius segmentum maius sit a f, minus autem f e, per sæpiùs allegatam 30 sexti elementorum.* Abscindatur *postmodum ex ipsa perpẽdiculari pars tertia d g, per nonam ipsius sexti elementorum: aut diuidatur angulus a b d bifariam sub recta b g, per nonam primi eorundem elementorum: coincidet enim b g recta, in ipsum punctum g.* Centro *itaque g, ad interuallum autem ipsius g f, circulus describatur f h* k: Is *enim circulus, dato triangulo æquilatero a b c erit æqualis.* Nam *si per antecedentem 15 propositionem, triangulum æquilaterum eidem circulo æquale describatur: illud ipsi dato triangulo a b c ad amussim coæquari reperietur.*

¶Idem aliter.

¶*Licebit & eundem circulum, ipsi dato triangulo æquilatero a b c æqualem, alia ratione colligere. Resumatur itaque datum triangulū a b c, unà cum a d perpendiculari: & puncto g alterutro duorum antecedentiū modorum adinuento. Et diuidatur latus a b proportionaliter in puncto l, cuius segmentum maius sit b l, minus uerò l a, quod bifariam diuidatur in puncto m: & dimidia l m proportionaliter diuidatur in puncto n, cuius segmentum maius sit m n, minus autem n l: & connectatur recta g n. Centro rursum g, interuallo autem g n, circulus describatur n h k f. Is enim circulus, eidem æquilatero triangulo a b c duobus argumentis conuincitur æqualis. In primis enim, quoniam semidiameter g n, ipsi g f semidiametro, iuxta præcedentem modum adinuento, offenditur æqualis. Secundò, si dato circulo n h k f, æquale triangulum æquilaterū per antecedentē propositionem describatur: illud rursum eidem æquilatero triangulo dato coæquabitur: adeò ut descriptio unius, reciprocā alterius fidem efficiat.* ¶*Quòd si inter a d perpendicularem, & basin d b, media* 2



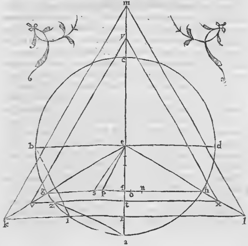
media proportionalis inueniatur o r, ex qua describatur quadratum o r s t: illud utrique & dato triangulo a b c, & eidem circulo n h k rursum coæquabitur. Quot igitur modis circulo dato æquilaterum triangulum describitur, uel ipsi triangulo circulus æqualis: totidẽ modis quadratum utrique conscribitur æquale. De his ergo satis.

PROPOSITIO XIX.

Oblato tandem circulo, duo simul describere triãgula æquilatera: quorum alterum ipsi dato circulo sit æquale, alterius uerò latera circumferentiæ eiusdem circuli coæquentur.

¶ *In maiorem tandem artis mathematicę amplitudinẽ, antecedentiũmque propositionum confirmationem, iuuat tãdem multis ostendere modis, ut duo simul construantur æquilatera triangula: quorum alterum sit æquale dato circulo, alterius uerò latera circumferẽtiæ eiusdem circuli sint*
1 *æqualia.* ¶ *Sit igitur datus circulus a b c d, cuius cẽtrum e, diametri uerò a c & b d, in eodem centro ad rectos sese dispescentes angulos. Et diuidatur e a semidiameter bifariam in puncto f, per 10 primi elementorum. atque per ipsum pũctum f, recta ducatur g h diametro b d parallela, per 31 ipsius primi elementorum, quę est latus trianguli æquilateri in dato circulo descripti: & connectatur e g & e h semidiametri.* Ipsi autem *g f aut f h, æqualis subtendatur b i, per primam quarti eorundem elementorum: & per punctũ i, eidem g h parallela ducatur* k l, *quæ conueniat cum e g & e h semidiametris in directum continuatis, ad ipsa puncta* k *& l. Ipsi tandem e* k *aut e l, æqualis secetur e m, & compleatur æquilaterum triangulum* k l m: *Illud enim ipsi dato circulo a b c d indubitãter est æquale, nempe congruens adamussim triangulo æquilatero per ante-*
2 *cedentem 15 propositionem adinuento.* ¶ *Aut (si uelis) diuidatur recta g h proportionaliter in puncto n, cuius segmentum maius sit g n: & ipsa f n proportionaliter diuidatur in puncto o p, cuius segmentum maius sit n o, per 30 sexti elementorũ. Nã si rectę h o ęqualis secetur e r, coincidet pũctum r in mutuam e a semidiametri & ipsius* k l *intersectionem: hinc*
3 *rursum cõstruetur triangulum æquilaterum* k l m. ¶ *Adde, quòd si secetur f p æqualis duplo segmenti n o & connectatur e g, & productis e g & e h semidiametris, secentur g* k *& h l ipsi e s atque inuicem æquales: connexa* k l *linea recta transiet per punctum r, eritque latus ipsius triã-*

guli æquilateri, quod eidem circulo dato coæquatur. ¶ *Secūda pars non* 1
minus leuiter, atque totidem modis absoluetur. Subtendatur ergo ipsi h o
æqualis b t: & per punctum t, ipsi g h parallela ducatur u x, contingens
ipsas e k & e l in punctis u & x. Ipsi autem e u uel e x, æqualis fece-
tur e y: & compleatur triangulum æquilaterum u x y. Nam tria illius
latera simul iuncta, circunferentiæ eiusdem circuli dati sunt æqualia:
quoniam si per aliquam antecedentium propositionum, recta suscipiatur
æqualis quadranti circunferentiæ ipsius dati circuli, ea offendetur con-
tinere $\frac{3}{4}$ *præcisè unius lateris ipsius trianguli u x y: & proinde 4 eiusdē*
circunferētiæ quadrantes, tribus lateribus adamussim coæquātur. ¶ *Po-* 2
terit & idē triangulū u x y, dato circulo isoperimetrū, in hunc fabricari
modum. Connectatur recta e s: & illi æqualis abscindatur ex ė a semi-
diametro, quæ sit e z: & per punctum z, ipsi g h parallela ducatur u x,
compleaturque rursum triangulum æquilaterum u x y. Est enim e z quę
ex centro dati circuli, uel ipsius trianguli isoperimetri, in latus eiusdem
perpendiculariter incidit. ¶ *Item, si recta f r proportionaliter diuidatur* 3



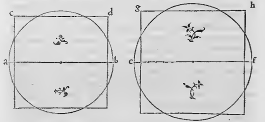
in ipso puncto t, cuius segmentũ maius sit r t, minus uerò t f: erit rursum punctum t, per quod trãsit præfatum latus u x, ipsius trianguli æquilateri u x y dato circulo isoperimetri. ¶Corollarium.

¶*Ex præfatis triãgulorũ descriptionibus, gemina suboritur circuli quadratura: nam media proportionalis inter m r & r k, est latus quadrati ipsi triangulo k l m, & proinde ipsi dato circulo a b c d æqualis. Et si inter rectam, unum latus & dimidium ipsius trianguli u x y comprehendentem, & dati circuli semidiametrum, media itidem proportionalis suscipiatur, per 13 sexti elementorum, ea erit latus eiusdem quadrati, quod dato æquum est circulo. Sed de his hæc sunt satis.*

PROPOSITIO XX.

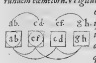
EX dato quopiã circulo, in quadratum æquale trãsmutato, cuiuis oblato quadrato circulum æqualem promptissimè colligere: atque è diuerso.

¶ *Sit in primis dato cuipiam circulo, cuius diameter sit a b descriptum æquale quadratum, cuius latus sit c d, per sextam, septimam, uel octauam propositionem: dati uerò circuli diameter, cui sit operæpretiũ æquale quadratum pariter describere, sit recta e f. Ordinetur itaque dimetiẽs a b linea prima, latus uerò c d linea secunda, & diameter e f tertia: & inueniatur quarta proportionalis, per duodecimam sexti elementorum, quæ sit g h, ex qua describatur quadratum: ipsum enim quadratum, dato circulo, cuius dimetiens est e f, coæquabitur.*



2 ¶*Cùm enim ipsę quatuor lineę rectę a b, c d, e f, g h, proportionales sint adinuicem, ut a b quidem ad ipsam c d, sic e f ad ipsam g h: permutatim*

*quoque proportionales erunt, per 16 quinti elementorum, ſicut a b ad ip-
ſam e f, ſic c d ad ipsã g h. Et quadrata igitur a b ipſis quatuor lineis pro-
portionalibus deſcripta, proportionalia erunt adinuicẽ, per 22 ſexti eo-
rundem elemẽtorũ. Vt igitur quadratũ quod ex a b, ad quadratũ ipſius
e f: ſic quadratum quod ex c d, ad quadratum
ipſius g h. Circuli porrò ſeſe adinuicẽ habent,
ut ea quæ ex illorum dimetiẽtibus fiunt qua-
drata, per ſecundã duodecimi elementorũ: &
quæ eidem ſunt eędem rationes, adinuicẽ ſunt
eædem, per undecimam quinti pręedictorum elementorũ. Circulus igitur
cuius dimetiens eſt a b, ad circulũ cuius dimetiens eſt e f, ſe habet, ut qua-
dratũ quod ex c d ad quadratũ quod fit ex g h : Et permutatim rurſum,
per eandem 16 quinti elemẽtorum, ut circulus cuius dimetiens eſt a b ad
quadratum, cuius latus eſt c d, ita circulus cuius dimetiẽs eſt e f ad qua-
dratum cuius latus eſt ipſa g h. Circulus porrò cuius dimetiens eſt a b,
quadrato cuius latus eſt c d, per hypotheſis conſtructionẽ eſt ęqualis: &
circulus igitur, cuius dimetiẽs eſt e f, ipſi quadrato cuius latus eſt g h pẽ-
denter coæquatur.* ¶ *At ſi uerſa uice oblato quadrato circulum æqualem* 3
*promptiſsimè colligere iuuet: latus quadrati ipſi dato circulo æqualis po-
natur linea prima, & dimetiens eiuſdem circuli linea ſecunda, tertia
uerò linea latus quadrati propoſiti in circulum æqualem reuocandi. In-
ueniatur poſtmodum quarta proportionalis, per ipſam 12 ſexti elemen-
torum: nam illa erit dimetiens circuli, qui eidem expoſito quadrato coæ-
quatur. Vt ſi (uerbi gratia) præfato circulo, cuius dimetiens eſt a b, datũ
fuerit æquale quadratum, cuius latus eſt c d, & propoſitum fuerit qua-
dratum cuius latus eſt g h, cui expediat æqualem deſcribere circulum:
fiat ut c d latus ad diametrum a b, ſic dati quadrati latus c g ad quartã
proportionalem quæ ſit e f. ipſa enim e f, erit dimetiens circuli, quadrato
cuius latus eſt g h æqualis. Horum autem probatio geometrica, à demõ-
ſtratione primæ partis nullo modo differre uidetur: mutato ſolummodo
laterum & dimetientium, ſimiliter & quadratorum atque circulorum
ordine. Vno itaque circulo in quadratum æquale, uel è diuerſo ſemel
tranſmutato: cuilibet alteri circulo dato æquale quadratum, datóue
quadrato æqualem circulum, tanquam ex archetypo promptiſsimè col-
ligetur.*



SECVNDI LIBRI FINIS.

LIBER TERTIVS RERVM MATHEMATICARVM HACTENVS DESIDERATARVM.

PROPOSITIO I.

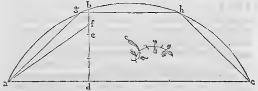
Datum quemlibet arcum circuli dimidia circunferentia minorem, in quotcunque partes inuicem æquales in primis diuidere.

1 ¶VT EX IIS QVAE DVOBVS PRIMIS LIBRIS *tradita sunt, illiúsque diuinæ proportionis beneficio, quæ in data linea recta per mediam & extremam rationem diuisa consistere uidetur, fructum aliquem tam in planis, quàm solidis ualeamus elicere figuris: docẽdum est in primis, qua ratione datus arcus circuli dimidia circunferẽtia minor, in quotcunque partes inuicem æquales, tum ab imparibus, tum ab inuicem primis numeris (quos uidelicet sola metitur unitas) denominatas diuidatur: idque fidissimo, & hactenus ignoto, sed facili admodũ traditionis artificio. Quo tum ad inuentionẽ lateris dati cuiuslibet regularis polygoni, à quouis numero denominati, quod in dato circulo describendũ proponetur: tum ad cętera non minus utilia, quã iucũda mathematicę rudimenta, tandẽ peruenire ualeamus. Id autẽ peculiaribus aliquot præceptis siue documentis, deinde uniuersali præstare nitemur.*

¶Primum documẽtum, ut datus arcus circuli dimidia circunferentia minor in tres partes inuicẽ æquales diuidatur.

2 ¶QVA RATIONE DATVS ARCVS BIFA*riam in primis diuidatur, & in partes consequenter à pariter paribus numeris denominatas, eum solum ignorare putamus, qui mathematica nunquam legerit (ne dicam intellexerit) elementa: cùm id per solam 30 tertij elementorum absolui uel facilè possit. Sit igitur datus arcus a b c dimidia circunferentia minor, in tres partes inuicem æquales diuidendus: cuius subtensa chorda sit a c. Abscindatur itaque ab eadem a c recta, pars tertia quæ sit a d, per nonam sexti elemẽtorum: suscitetúrque*

recta d b, super eadem a c perpendicularis, per undecimam primi eorundem elementorum. Ab ipsa deinde perpendiculari d b, abscindatur rursum teria pars, quæ sit b e, per eandem nonam sexti elementorum. Diuidatur postmodum recta b e proportionaliter, seu media & extrema ratione in puncto f, cuius segmentum maius sit b f, per 30 ipsius sexti elementorum. Connectatur demum a f linea recta: nam eadem a f, erit chorda subtendens tertiam partem ipsius dati arcus a b c. Coaptentur igitur ipsi a f æquales a g, g h, h c: coincidet enim h c recta, in ipsum pũctum c (ut ipsa te docebit experientia) erúntque propterea arcus a g, g h, h c æquales adinuicem, per 28 tertij elementorum.



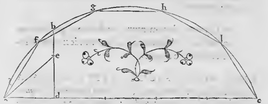
¶*Haud dissimili uia colligetur recta subtendens tertiam partem dimidiæ circunferentiæ ipsius circuli, quæ alioqui ex semidiametro satis innotescit: similiter dati cuiuslibet arcus eadem semicircunferẽtia maioris.*

¶Secundum documentum, qualiter idem arcus circuli, dimidia circunferentia minor, in quinque partes inuicem æquales diuidi possit.

¶QVOD SI DATVS ARCVS CIRCVLI, 3
præfata semicircunferentia minor, in quinque partes inuicem æquales proponatur diuidendus: sic facito. Esto huiuscemodi datus arcus a b c, cuius subtensa chorda sit rursum a c. Abscindatur igitur ab eadem a c, pars illius quinta per nonam sexti elementorum, quæ sit a d. Et erigatur à puncto d, perpendicularis d b: quæ per 30 ipsius sexti elementorum, proportionaliter diuidatur in puncto e, cuius segmentum maius proportionale sit d e. Connectatur tandem a e linea recta: hæc enim erit chorda, subtẽdens quintam partem ipsius dati arcus a b c. Coaptentur igitur

eidem

eidem a e æquales a f, f g, g h, h l, l c: quoniam l c coincidet in ipsum punctum c, eritque præfatus arcus a b c diuisus in quinque partes adinuicem æquales, per ipsam 28 tertij elementorum.



¶Tertium documentum, qua ratione præfatus arcus circuli, eadem semicircunferentia minor, diuidatur in septem partes æquales adinuicem.

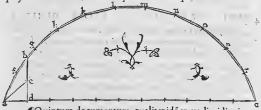
4 ¶VBI PORRO DATVS ARCVS DIMIDIA *circuli periphæria minor, in septem partes inuicem æquales sese offeret diuidendus: hac procedendum erit uia. Sit rursum datus arcus a b c, & subtensa illius chorda a c: à qua abscindatur pars septima per ipsam nonam sexti elementorum, quæ sit a d. Ab ipso autem puncto d, perpendicularis excitetur d b: quæ proportionaliter diuidatur in puncto e, similiter & in ipso puncto f, cuius segmenta maiora sint b e atque d f. Consequenter e f, itidem proportionaliter diuidatur in puncto g, cuius segmentum maius sit e g, per sæpius allegatam 30 sexti elementorum. Con-*



nectatur demum recta a g : nam illa erit chorda subtendens septimam partem ipsius dati arcus a b c. Coaptentur *igitur, per primam quarti elementorum, eidem a g æquales a h, h k, k l, l m, m n, n o, o c, præfatum arcum a b c in septem partes inuicem æquales, per eandem 28 tertij elementorum diuidentes.*

¶ Quartum documentum, de diuisione præfati arcus dimidia circunferentia minoris, in undecim partes inuicem rursum æquales.

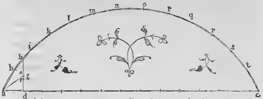
¶NEC MINVS FACILE DATVS ARCVS A 5
b c, præfata semicircunferētia minor, in undecim partes inuicem æquales diuidetur. Secta nāque parte undecima ipsius chordæ a c, quæ sit rursum a d, & erecta perpendiculari d b : sufficit eandem perpendicularem bifariam diuidere in puncto e, & connectere a e lineam rectam, atque illi æquales subtendere a f, f g, g h, h k, k l, l m, m n, n o, o p, p r, r c, quæ præfatum arcum a b c, in undecim partes inuicem æquales diuident.



¶Quintum documentum, qualiter idē arcus dimidia circunferentia minor, in 13 partes inuicē æquales diuidatur.

¶*Et si prædictum arcum a b c, in tredecim partes inuicem æquales diuidere fuerit operæpretium: facienda erit a d tredecima pars ipsius chordæ a c, & erigenda de more perpendicularis d b, & in puncto e bifariam, in ipso autem puncto f proportionaliter diuidenda, cuius segmentū maius sit b f, minus f d.* Diuidenda *quoque rursum erit ipsa e f proportionaliter in puncto g, cuius segmentum maius sit f g.* Nam *si connectatur a g linea recta, & illi subtendantur æquales numero 13 : erit datus arcus a b c,* 6

b c, in tredecim partes inuicē æquales distributus. Vt ea quæ sequitur uidetur ostēdere figura, iuxta præscriptū documētum solito more delineata.



¶ *Habes igitur uiam apertam colligendi cæteras chordas, quæ partes eiuscemodi arcuum dimidia circunferentia minorum, à reliquis tum imparibus, tum primis adinuicem numeris denominatas: quas ob contingentem earundem rectarum cum periphæriæ partibus confusionem, ulteriùs prosequi consultò supersedemus.*

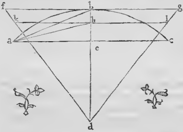
¶Sextum, & generale documentum, quo datus arcus dimidia circunferentia minor, in quotcunque partes inuicem æquales diuiditur.

¶*Iuuat documentum tradere generale, quo datus arcus circuli dimidia circunferentia minor, in quotcunque partes inuicem æquales indifferēter diuiditur. Id autem adimplere non erit difficile, ubi propositum arcū in rectam æqualē in primis resoluere docuerimus: & arcū uersa uice colligere, oblatę cuiuis lineæ rectæ, ipsa dimidia circūferentia minori ęqualem. Vtrunque porrò, una eademq; uia, compēdiosa quidem & admiratione non indigna, absolui posse tandem comperimus: in hunc modum.*

¶Prima pars huius documēti, qua datus arcus dimidia circunferentia minor, in rectam æqualem resoluitur.

¶*Sit igitur datus arcus a b c, bifariam diuisus in puncto b: sitque centrū circuli, cuius datus arcus est sectio, punctum d. Et connectantur a b, a c, b d lineæ rectæ: secètque b d ipsam a c, in puncto e. Secabit autem b d eandem a c bifariam, & ad rectos angulos: cùm bifariam diuidat eundem arcum a b c. Tangat insuper recta quædam linea f g eundem ar-*

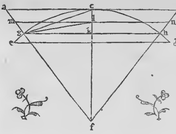
cum a b c, in ipso quidem puncto b, eidē a c parallela: & ad rectos proinde consistēs angulos cum ipsa b d. Inter a b consequenter & a e rectas, duæ lineæ proportionales inueniantur, quarum minor & ordine tertia sit a h, subtendens angulum rectum qui sub a e h. Per punctum uerò b, utrique ipsarū f g & a c parallela ducatur k l, per 31 primi elemētorū: secētúrque h k, & h l, ipsi a e uel e c æquales. Connectantur demum d k & d h lineæ rectę: quæ in directū productæ uersus k *& l, contingant rectam f g, in ipsis quidem punctis f & g. Quoniam recta f g, inter d f & d g comprehensa, est æqualis dato arcui a b c.*



¶Secunda pars, ut data linea recta in arcum circunferentiæ, eidem rectæ æqualem, uersa uice reducatur.

¶At si uersa uice, datam lineam rectam, in arcum eidem lineæ rectæ æqualem, reuocare fuerit operæpretium: haud dißimili uia procedendum erit. Sed hîc de rectis uelim intelligas, quæ datæ circunferentiæ partem efficiunt ipsa dimidia circunferētia minorem. Sit igitur data linea recta a b, bifariam diuisa in puncto c: tangénsque circuli sectionem d c e (cuius centrum f) in ipso puncto c: & connectantur a f, c f, b f, lineæ rectæ. Erit igitur a b, cum eadem c f ad angulos rectos constituta. Et si connectantur g c & g h lineæ rectæ, secabitur eadem g h ab ipsa c f bifariam, & ad rectos angulos: eritque g h ipsi a b parallela, quemadmodum ex 4 & 28 primi elementorum concludere haud difficile est. Inter ipsas postmodum g c & g k, duæ lineæ proportionales inueniantur, quarum minor & ordine tertia sit g l, subtendens angulum rectum qui sub g k l. Per punctum denique l, utrique ipsarum a b & g h parallela ducatur m n, per 31 primi eorundem elementorum. Aio itaque, rectam m n esse

chordam



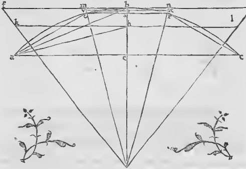
chordam illius arcus, qui datæ a b lineæ rectæ est æqualis: cuiusmodi uidetur esse recta d e, eidem m n æqualis, subtendens ipsum arcum d c e, qui propterea eidẽ a b lineæ rectæ de necessitate coæquatur.

¶ Tertia pars principalis, qua ratione datus arcus in quotcunque partes inuicem æquales sit diuidendus.

¶HIS IN HVNC MODVM PRAEOSTENSIS, *cùm datum arcum dimidia circunferentia minorem, in quotcũque partes inuicem æquales diuidere fuerit operæpretium: sic facito. Datus arcus in lineam rectam, per antecedentem primam partem resoluatur: & ab ipsa linea recta, abscindatur quota siue ordinata pars, ab eo denominata numero, per quem propositus arcus sese offeret diuidendus. Eadem insuper quota pars, in arcum æqualem uersa uice reducatur, per secundam huiusce documenti partem: hoc est, inueniatur chorda, quæ eundẽ particularem subtendit arcum. Nam huiuscemodi chorda, toties ipsi arcui dato coaptabitur, quot fuerint unitates in ipso partium exposito numero. Hæc autem clariùs dignoscentur, si familiari & ob oculos exposita descriptione, de more fuerint elucidata.*

¶ *Sit igitur datus arcus circunferentiæ circularis a b c, cuius centrum d, chorda autem a e c, bifariam quidem partitus in puncto b, ab ipso uidelicet semidiametro d b: quem arcum a b c, in tres partes inuicẽ æquales (exempli gratia) diuidere sit operæpretium. Inueniatur igitur in primis recta linea eidem arcui æqualis, per primam partem huiusce documenti, quæ sit f g, tangens ipsum arcum a b c, atque bifariam diuisa in ipso puncto b: adminiculo uidelicet proportionalis a h, inter a b & a e,*

lineas rectas adinuentæ, & ipsius k l parallelæ, quæ chordæ a e c est æqualis. Abscindatur postmodum ab ipsa f g linea recta, pars tertia, per nonam sexti elementorum, quæ sit f m, cui æqualis secetur m n: erit itaque n g reliqua pars tertia totius lineæ rectæ f g, diuidetúrque præfata m n tertia pars bifariam, in ipso quidem puncto b.



His in hunc modum absolutis, connectantur d m atque d n lineæ rectæ, quæ secent datum arcum a b c in punctis o & r: & connectatur b o linea recta, unà cum ipsa o r (quæ secet d b semidiametrum in puncto s) inter b o atque o s lineas rectas, duæ lineæ proportionales inueniantur, per doctrinam primi libri, quorum minor & ordine 3 sit o t, subtendens angulum rectum o s t. Et per punctum t, ducatur recta u x, ipsi f g parallela, per 31 primi eorundem elementorum, atque inter d m & d n rectas comprehensa. Erit enim recta u x, chorda quæ subtendit tertiam partem ipsius dati arcus a b c. Hinc igitur u x, tres subtendantur æquales: ut in ipsa cõtinetur figura. Haud aliter faciendum esse uelim intelligas, de cæteris ipsius dati arcus, uel alterius cuiuscunque partibus, tam ab imparibus, quàm à primis adinuicem numeris denominatis. ¶ Horũ porrò documentorum traditiones, in præsentiarum nullo alio quàm oculari, & ad iustam circini rationem obseruato, confirmauimus demonstrationis examine: ne uolumen hoc, alioqui satis amplum, ob uarias atque difficiles rectarum supputationes, in iniustum contingat foliorum produ-

producere numerum. Quæ si quis forsitan Orôtiomastix, *& ad calumniam potius, quàm ad frugem natus homuntio, minus probauerit: præstet (dummodo id concedatur) meliora, & consideret quantum intersit inter improbum obtrectatorem, & eum qui aliquid non minus gratum quàm utile, pro concessa ingenij dexteritate molitur.*

¶Corollarium primum.

8 ¶*Omnis igitur rectilineus angulus, & proinde angulus rectus ab ipso quadrante dimensus, in quotcunque partes inuicem æquales diuidetur. Cùm enim arcus ab ipso angulo comprehensus, sit dimidia circunferentia minor, is diuidi potest in quotcunque segmenta adinuicem æqualia: siue antecedentibus quinque primis documentis (unamquanque sectionem, in quotlibet rursum partes inuicem æquales diuidendo) seu generali partitione, iuxta sexti documenti traditionem, uti libuerit.*

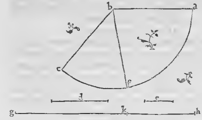
¶Corollarium secundum.

9 ¶*Circunferentia insuper dati cuiuslibet circuli, in quotcunque partes inuicem æquales pendenter diuisibilis erit. Diuiso enim ipsius circuli quadrante, in liberas partes adinuicem æquales: quadruplum uniuscuiusque partis, efficiet totius circunferentiæ partem similem: ipsáue quadrantis pars eiusdem circunferentiæ restituet à quadruplo numero denominatam. Vtpote, si quadrans diuisus fuerit in septem partes adinuicem æquales, quadruplum septimæ partis illius, erit totius circunferentiæ pars septima: uel eadem pars septima, eiusdem circunferentiæ pars uigesimaoctaua. Et in hunc modum de cæteris.*

¶Corollarium tertium.

10 ¶*Omnis præterea rectilineus angulus, sub quauis ratione data proportionaliter diuidetur. Sit enim datus angulus rectilineus* a b c, *sub* a b *&* b c *rectis comprehensus: data uerò ratio, sub qua idem angulus diuidi iubeatur, quæ* d ad e. *Circa igitur punctum* b, *ex alterutra duarum* a b *uel* a c, *circunferētia describatur* a f c: *quæ ipsius anguli* a b c, *ueram & ad centrum relatam exprimet quantitatem. Conuertatur itaque, per primam partem antecedentis sexti documenti, arcus* a f c *in lineam rectam, quæ sit* g h. *Deinde fiat ut* d ad e, *sic* g h *recta, ad quartam proportionalem* h k, *per* 12 *sexti elementorum. Ipsa postmodum* h k *linea recta, in arcum ipsius reuocetur circuli (cuius centrum* b) *per secundam partē eiusdem sexti documenti: utpote, in arcum* c f. *Erit igitur, ut arcus* a f c *ad arcum* c f, *sic recta* g h *ad rectam* h k: *& proinde ut* d ad e, *per undecimam quinti eorundem elementorum. Connectatur ergo recta* b f. *An-*

gulus itaque a b c, ad angulum c b f eandem rationem obtinebit, quam arcus a f c ad arcum c f, per ultimam ipsius sexti elementorum: & consequẽter quã d ad e.



¶ Subcorollarium.

¶ Sector igitur b c a, sub eadem ratione quæ d ad e, diuisus erit: se habent enim sectores adinuicẽ, ut ipsi arcus ab eisdem sectoribus comprehẽsi, per eandem ultimam sexti elementorum.

¶ Corollarium quartum.

¶ Vnaquæque præterea multangula atque regularis figura rectilinea, in dato circulo describi consequenter uel facile poterit. Regulares enim appellantur figuræ rectilineæ, quę æqualia habent latera, & angulos pariter adinuicem æquales. Hæ autem in circulo describi dicuntur, quãdo unusquisque figuræ angulus circunferẽtiam ipsius circuli tangit, per tertiam quarti libri elementorum diffinitionem. Diuisa autem circunferentia in tot partes inuicem æquales, quot sunt latera uel anguli in data figura rectilinea, & ad singula proxima diuisionum puncta applicata linea recta, cadent singulæ lineæ rectæ intra circulum, & per secundam tertij elementorum: concursus autem laterum ipsos angulos continentium, in eadem circunferentia de necessitate consistent. 11

PROPOSITIO II.

EX triangulo isoscele, cuius unusquisque angulus, qui ad basin duplus sit reliqui: cætera isoscelia colligere triãgula, quorum uterque angulus qui ad ipsam basin, eas rationes ordine seruet ad reliquum, quam dati numeri super binarium ad unitatem.

¶ Describatur igitur in primis triangulum isosceles a b c, cuius uterque angulus qui ad basin b c duplus sit reliqui anguli qui sub b a c, per decimam 1

mam

2 *mam quarti elementorum.* ¶ *Fit autem huiuſcemodi triangulũ iſoſceles*
(ut illius perſtringamus artificium) ſi latus a b uel a c proportionaliter,
ſeu media & extrema ratione diuidatur, & ſegmento maiori æqualis
fiat baſis ipſa b c. Centro poſtmodum a, interuallo autem a b uel a c, de-
ſcribatur arcus circuli b d c, ſubtendens ipſam rectam ſiue baſin b c triã-
3 *guli a b c.* ¶ *His in hunc modum præparatis, diuidatur in primis arcus a*
d c in tres partes inuicem æquales, per primum, aut ſextum documentum
antecedentis primæ propoſitionis, cuius tertia pars ſit b d: & connectã-
tur a d & d c lineæ rectæ. Triangulum enim a d c erit iſoſceles, & ha-
4 *bebit unumquemque angulum qui ad baſin d c triplum reliqui.* ¶ *Diui-*
datur conſequenter præfatus arcus b d c, biſariam in puncto e, per 30
tertij e ementorum: & connectantur a e & e c lineæ rectæ. Quoniam
triangulum a e c, erit rurſum iſoſceles: & uterque illius angulus qui ad
5 *baſin e c, quadruplus reliqui anguli qui ſub e a c.* ¶ *Diuidatur inſuper*
arcus e c in quinque partes inuicem æquales, per ſecundum uel ſextum
ipſius antecedentis primæ propoſitionis documentum, cuius quinta pars
ſit c f: connectantúrque a f, & f c lineæ rectæ. Trianguli nanque iſoſcelis
a f c, uterque angulus qui ad baſin f c quintuplus erit reliqui, quarta
6 *uidelicet parte quadruplum excedens qui ſub a e c.* ¶ *Et ſi arcus d c biſa-*
riam diuidatur in puncto g, per ipſam 30 tertij elementorum, & conne-
ctantur a g & g c lineæ rectæ: erit conſequenter triangulum a g c iſoſce-
les, habens unumquemque angulum qui ad baſin g c ſextuplum reliqui,
7 *bis enim triplus efficit ſextuplum.* ¶ *Præterea, ſi arcus g c in ſeptem par-*
tes inuicem æquales diuidatur, per tertium aut ſextum documẽtum eiuſ-
dẽ primæ propoſitionis, cuius ſeptima pars ſit g h, cõnectãtúrque a h &
h c lineæ rectæ: uterque angulus qui ad baſin h c ipſius iſoſcelis trianguli
a h c, reliqui anguli ſeptuplus erit, nempe ſextuplum qui ſub a g c una
8 *ſexta ſuperans.* ¶ *Conſequenter, ſi arcus e c biſariam diuidatur in pun-*
cto i, per 30 tertij elementorum, & connectantur a i & i c lineæ rectæ:
triangulum a i c erit pendenter iſoſceles, & habebit utrumque angulum
qui ad baſin i c octuplũ reliqui, quadrupli uidelicet qui ſub a e c duplũ.
9 ¶ *Item ſi arcus d c in tres partes inuicem æquales diuidatur, per ipſum*
primum aut ſextum antecedentis primæ propoſitionis documentũ, cuius
tertia pars ſit c k, & connectantur a k & k c lineæ rectæ: fiet rurſum
triangulum iſoſceles a k c, cuius uterque angulus qui ad baſin k c nonu-
10 *plus erit reliqui, hoc eſt, tripli qui ſub a d c triplus.* ¶ *Diuidendo poſt-*
modum ipſum arcum f c biſariam in puncto l, per ſæpiùs allegatam 30

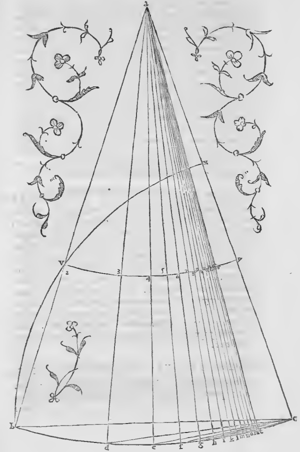
tertij elementorum, & connexis de more a l & l c lineis rectis: trianguli isosceles a l c quilibet angulus qui ad basin l c reliqui anguli decuplus erit, siue quintupli qui sub a f c duplus. ¶*Insuper, si arcus l c in decẽ partes inuicem æquales diuidatur, hoc est in duas, & quælibet in quinque, cuius decima pars sit l m, connectantúrque a m & m c lineæ rectæ: triãgulum isosceles a m c, habebit unũquemque angulũ qui ad basin m c undecuplũ reliqui, hoc est decuplũ qui sub a l c una decima parte superãtẽ.* 11

¶*Diuidatur præterea arcus g c bifariã in puncto n, per ipsam 30 tertij elementorũ, & connectantur a n & n c lineæ rectæ: fiet enim triangulũ isosceles a n c, cuius uterque angulus qui ad basin n c dodecuplus, seu bis sextuplus erit reliqui.* 12 ¶*Quòd si arcus n c in duodecim partes inuicem æquales diuidatur, primò quidem in duas, & quælibet rursum in duas, & tandem quælibet in tres, cuius pars duodecima sit n o, & connectantur a o & o c lineæ rectæ: fiet rursum triangulũ isosceles a o c, habens utrũque angulum qui ad basin o c tredecuplum reliqui, hoc est, dodecuplum, qui sub a n c una duodecima parte superantem.* 13 ¶*Haud dissimili uia, si arcus h c bifariam diuidatur in puncto r, per ipsam 30 tertij elementorum, & connectantur a r & r c lineæ rectæ: unusquisque angulus qui ad basin r c ipsius trianguli isoscelis a r c, eam rationem habebit ad reliquum, quam 14 ad unitatem: erit enim bis septuplus qui sub a h c continetur.* 14 ¶*Adde, quòd si arcus f c in tres partes inuicem æquales diuidatur, cuius tertia pars sit c s, & connectantur a s & s c lineæ rectæ: consurget rursum triangulum isosceles a s c, cuius uterque angulus qui ad basin s c eam rationem habebit ad reliquum, quam 15 ad 1, nempe ex quintupla ratione ipsius anguli a f c ad suum reliquum ter sumpta resultantem.* 15

¶*Postremò, si arcus i c bifariam diuidatur in puncto t, connectantúrque a t & t c lineæ rectæ: causabitur isosceles triangulum a t c, cuius uterque angulus qui ad basin t c, sedecuplus est reliqui, hoc est, octupli qui sub a i c duplus: quanto enim minuitur arcus basis, tanto uidetur augeri contentus ad ipsam basin angulus.* 16 ¶*Et deinceps in hunc modum de cæteris isoscelibus triangulis faciendum, ac pendenter cõtinuandum esse uelim intelligas: quorum descriptiones particulares, tum propter laterũ atque basium eorundem triangulorum confusionem, tum ob infinitum illorum progressum, ulterius exprimere iure supersedemus.* 17

¶Supradictorum demonstratio.

¶QVOD AVTEM IN PRIMIS VTERQVE 18
angulorum


a
x
V
2
3
4
5
6
p
b
c
d
e
f
g
h
i
k
l
m
n
o
s
t

angulorum qui ad basin d c ipsius trianguli isoscelis a d c, triplus sit reliqui anguli d a c: sic demonstratur. Angulus enim b a d qui ad centrum, duplus est anguli b c d qui ad circunferentiam, per 20 tertij elementorum. Angulus autem a c d continet angulum a c b, & dimidium praeterea ipsius anguli b a d. Demitur itaque ab ipso angulo b a d dimidium, illúdque additur angulo a c b. Angulus porrò a c b duplus est anguli b a c, per constructionis primariam hypothesin. Et proinde angulus a c d duplus est anguli d a c, atque bis duplus dimidii anguli b a d. Est autem angulus b a d dimidius ipsius anguli d a c, per ipsam anguli constructionem: subtendit enim arcum b d, qui est dimidium ipsius arcus a d c. Dimidium itaque eiusdem anguli b a d, facit unum quartum ipsius anguli d a c. Bis autem duplum unius quarti, efficit quatuor integri quarta, quae unum restituunt integrum. Angulus igitur a c d (& proinde illi aequalis a d c) duplus est anguli d a c, & eundem praeterea angulum d a c semel comprehendit. Triplus est itaque uterque angulus qui ad basin d c, reliqui anguli qui sub d a c.

¶HAVD DISSIMILI VIA OSTENDETVR 19
uterque angulus qui ad basin e c ipsius isoscelis trianguli a e c, quadruplum fore reliqui anguli e a c. Angulus nanque b a e, duplus est rursum anguli e c b: quapropter angulo a c b additur dimidium ipsius anguli b a e, & idem anguli dimidium ab eodem angulo b a e subtrahitur. Et cùm angulus a c b sit duplus anguli b a c: is igitur duplus est anguli e a c, atque bis duplus dimidij ipsius anguli b a e. Dimidium porrò anguli b a e simul est dimidium ipsius anguli e a c: cùm illi per cōstructionem sint adinuicem aequales. Quod autem dimidij bis est duplum, duo facit integra: nempe dimidia quatuor, quae duo conficiunt integra. Angulus igitur a c e (& illi consequenter aequalis a e c) duplus est anguli e a c, & eundem insuper angulum e a c bis comprehendit. Quadruplus est propterea uterque angulus qui ad basin e c, reliqui anguli qui sub e a c.

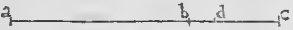
¶IDEM QVOQVE DEMONSTRARE LICE- 20
bit, per triangulum a d c. Angulus enim d a e est tertia pars anguli e a b, & proinde ipsius anguli e a c, qui eidem angulo e a b per constructionem

ctionem est æqualis. Et quoniam angulus d a e duplus est anguli e c d, per ipsam 20 tertij elementorũ: erit idem angulus e c d dimidium unius tertij, & proinde unum sextum anguli e a c. Angulus porrò a c d, ostensus est triplus anguli d a c: angulus igitur a c e triplus est anguli e a c, & simul bis triplus unius sexti eiusdem anguli e a c. Bis autem tria sexta, efficiunt sexta sex, quæ unum ualent integrum. Angulus igitur a c e (& illi consequenter æqualis a e c) triplus est anguli e a c, & illũ præterea semel comprehendit. Quadruplus est itaque angulus uterque qui ad basin e c, reliqui anguli qui sub e a c. Quæ ostendenda susceperamus.

21 ¶Eisdem quoque argumentis demonstrare licebit, propositas angulorum qui ad bases reliquorum isoscelium triangulorum rationes, ad eum angulum qui sub ipsis æqualibus lateribus continetur: comparatis tum inuicem, tum cum ipso a e c triangulo, ceteris isoscelibus triangulis, atque eorundem triangulorum angulis.

¶Assumpti confirmatio.

22 ¶Quòd autem duabus inæqualibus quantitatibus datis, si tantum auferatur à minore, quantum ipsi maiori additur, augmentetur ipsa maior supra minorem eadem parte bis sumpta: sic confirmatur. Sit enim recta linea a b ipsius c d (uerbi gratia) dupla: & detrahatur ex ipsa minore pars b d, ipsíque maiori a b superaddatur. Clarum est a b rectam, augeri super d c ipsa b d parte detracta: quæ eidem a b rursum adiuncta, auget quoque rursum eandem a b, præfata parte b d. Quare recta b d augetur super d c, bis sumpta parte d b. Idem uelim habeas iudicium, de similibus quibuscunque, & similiter propositis magnitudinibus, & angulis.



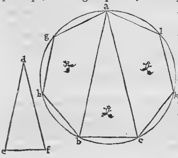
¶Ocularis prædictorum experientia.

23 ¶Si iuuet autem ab inspectione oculari, supradictorum facere periculũ: centro c, interuallo autem c b, describatur arcus b u x: atque circa punctum a, inuariato circino, arcus u y, qui priorem in ipso a b latere, & puncto u de necessitate secabit. Accipe tandem officio circini, quantus arcus subtendatur de circunferentia u y, ab angulo qui ad a cuiuscun-

que uolueris isosceles trianguli: nam toties idem arcus cõtinebitur in circunferentia b u x, quoties uterque angulus qui ad basin dicitur cõtinere reliquum.

¶Corollarium, de regularium polygonorum descriptione, in dato circulo, per isoscelia triangula.

¶DATVM IGITVR QVODVIS POLYGONVM *æquilaterum & æquiangulum, in dato circulo uel facilè describetur. Vt enim undecima quarti elementorum Euclidis, officio trianguli isoscelis, cuius uterque angulus qui ad basin duplus est reliqui, pentagonũ æquilaterum & æquiangulum in dato circulo describitur: haud dissimili uia cætera polygona æquilatera & æquiangula, adminiculo reliquorum isoscelium triangulorum, quorum anguli qui ad basin eam rationem ordine seruant ad reliquum, quam cæteri numeri supra binarium ad ipsam unitatem, describi uel facilè poterunt.* ¶ *Vt si propositum fuerit (exempli gratia) heptagonum regulare, hoc est, æquilaterum & æquiangulum, in dato circulo a b c describendum: construendum erit in primis triangulum isosceles d e f, cuius uterque angulus qui ad basin e f triplus sit reliqui, ut in hac propositione traditum est. Huic postmodũ triangulo d e f æquiangulum triangulum in dato circulo a b c describatur, per secundam quarti elementorum, utpote triangulum eisdem literis a b c designatum. Et quoniam uterque angulus qui ad basin e f, triplus est reliqui: uterque similiter angulus qui ad basin b c, reliqui triplus erit. Et* 24



proinde uterq; arcus a b & a c, triplus erit consequẽter ipsius arcus b c, subtendẽtque de necessitate ter basin siue rectã b c, quæ est latus ipsius heptagoni regularis. Si coaptẽtur igitur ipsi b c lineæ rectæ æquales a g, g h, h b, c k, k l,

k l, l a, per primã quarti elementorũ: descriptũ erit in dato circulo a b c, heptagonum a g h b c k l. Quod *in primis constat esse æquilaterum: illius nanque latera, eidem basi seu rectæ b c sunt æqualia, & proinde æqualia adinuicem.* Et *eadem latera subtendentes arcus, inuicem pariter æquales: quoniam in eodem circulo, æquales rectæ lineæ æquales auferunt arcus, per 28 tertij elementorum.* ¶ Poterit *& uterque arcus a b & a c, in tres partes inuicem æquales prima fronte diuidi, per primum aut sextum antecedentis primæ propositionis documentum: a b quidem in punctis g & h, & a c in punctis k & l.* Nam *connexis a g, g h, h b, c k, k l, l a lineis rectis, idem heptagonum æquilaterum a g h b c k l in eodem circulo descriptum erit: horum siquidem arcuum quilibet ipsi b c, & omnes proinde inuicem sunt æquales.* In *eodem porrò circulo, sub æqualibus arcubus æquales rectæ lineæ subtenduntur, per 29 tertij elementorum.* ¶ Aequilaterum *est igitur ipsum a g h b c k l heptagonum: aio quòd & æquiangulum.* Quilibet *enim angulus ipsius heptagoni a g h b c k l, subtendit quinque partes inuicem æquales, qualium tota circunferentia est septem: & anguli qui super æquales deducuntur arcus, sibi inuicem sunt æquales, siue ad centrum, siue ad circunferentiam deducti fuerint, per 27 ipsius tertij elementorum.* Aequiangulum *igitur, & æquilaterum, præfatum heptagonum a g h b c k l, & in dato circulo promissa facilitate descriptum.* ¶ Haud *dissimili uia cum triangulo isoscele, cuius uterque angulus qui ad basin quadruplus fuerit reliqui, nonagonum æquilaterum & æquiangulum, in ipso describetur circulo: Similiter & undecagonum, coadiuuante triangulo isoscele, cuius uterque angulus qui ad basin quintuplus fuerit reliqui.* Et *deinceps in hunc modum, de cæteris regularibus polygonis.*

¶Notandum.

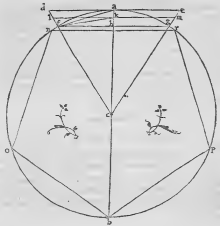
25 ¶ QVA RATIONE AVTEM POLYGONVM *quoduis æquilaterum, & æquiangulum, circa datum circulum describatur, aut circulus tam in dato polygono regulari, quàm circa idem regulare polygonum: ex iis quæ super quartum elementorum Euclidis, de pentagono atque hexagono conscripsimus, colligere non est difficile: utpote, quæ cæteris quibuscunque polygonis possunt indifferenter adcommodari.*

PROPOSITIO III.

Latus datę cuiuslibet multangulæ atque regularis figuræ, quæ in dato circulo describenda proponetur, alia ratione colligere.

¶ *Id in primis uniuersaliter absoluemus, per secundam uidelicet partem sexti documenti antecedentis primæ propositionis: inueniendo quippe lineam rectam, quæ datam circunferentiæ partem, à qua propositum denominatur polygonum, subtendere uidetur. Sit igitur datus circulus, cuius diameter a b, centrum uerò c: in quo quidem circulo, operæpretium sit describere pentagonum (uerbi gratia) æquilaterum & æquiangulum. Vertenda erit igitur in primis ipsius dati circuli peripheria, circunferentiáue, in lineam rectam, per primam aut secundam propositionem antecedentis secundi libri. Ab ipsa deinde linea recta, secanda erit quota siue* 1

ordinata



ordinata pars, per eum expressa numerum, à quo datum & inscribendum polygonum denominatur, utpote quinta, per non im sexti elementorum. Hinc igitur quintæ parti circunferentiæ, æqualis esto recta d e, tangens ipsum datum circulum, atque bifariam diuisa in ipso puncto a, & ad rectos angulos cum a b semidiametro constituta. Connectantur postmodum c d atque c e lineæ rectæ, quæ secent circuli periphæriam in punctis f & g: & connectãtur a f & f g lineæ rectæ, secetque f g ipsum diametrum a b in puncto h. Erit igitur f g ipsi d e parallela: & bifariam diuisa ab eodem circuli dimetiente, in puncto h. Inter a f consequenter & f h rectas, duæ lineæ rectæ continuè proportionales inueniãtur, per doctrinam antecedentis libri primi: quarum minor, & ordine tertia, sit f k, subtendens angulum rectũ qui sub f h k. Et per punctũ k, utrique ipsarum d e atque f g parallela ducatur l m, per 31 primi elementorum, inter c d atque c e rectas comprehensa. His in hunc modum constructis, erit recta l m latus pentagoni æquilateri & æquianguli in eodem circulo descripti: nempe subtendens arcum n r, ipsi d e quintã circunferentiæ partem repræsentanti æqualẽ. Subtendantur ergo eidem l m æquales, n o, o b, b p, p r, & o r, regulare pentagonum n o b p r comprehendentes. Haud aliter heptagonum, aut datum quoduis aliud polygonum regulare, in eodem circulo describere licebit.

2 ¶ *Quòd autem ipsa l m sit latus pentagoni, & ipsa proinde secunda pars præallegati sexti documenti antecedentis primæ propositionis fidelis & uera: solito numerorum examine, in hunc modum confirmatur. Supponatur itaque, circuli diameter a b fore partium 120: & proinde semidiameter a c similiũ partiũ 60. Qualium autẽ partiũ diameter est 120, talium circunferentia est 376, & minutorum 55, 23, 4, 36, 52, per ostensam circunferentiæ rationem ad ipsum diametrũ. Quinta pars igitur circunferentiæ, habet partes 75, & minuta 27, 4, 36, 55, 22, 24: tãta est igitur ipsa d e, & illius dimidia d a similium partium 37, & minutorum 41, 32, 18, 27, 41, 12. Horum autem quadratum, habet partes 1420, & minuta 42, 36, 12, 46, 26, 19, 10, 17, 45: quæ iũcta 3600 partibus quadrati semidiametri a c, cõficiunt quadratũ ipsius d c, per 47 primi elementorum, partiũ quidem 6020, & minutorũ 42, 36, 12, 46, 26, 19, 10, 17, 45. Quorũ radix quadrata, hoc est, ipsa d c recta, habet partes 70, & minuta 51, 25, 5, 18, 32, 30. Et quoniã triangula c d a & c f h, sunt inuicem æquiangula, per 29, & 32 primi elementorum: erit per quartam sexti eorundem elementorum, ut c d ad ipsam d a, sic c f ad*

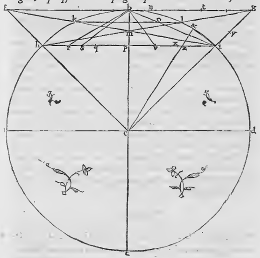
r

ipsam f h. Per uulgatam igitur quatuor proportionalium numerorum regulam, prodibit f h nota longitudinis, partium quidem 31, & minutorum propemodum 55: quorum quadratum habet partes 1018, & minuta 40, 25. Horum autem radix quadrata, hoc est, ipsa c h, continet partes 50, & minuta 48, 24, 19, 9: & proinde reliqua h a, erit partium 9, & minutorum 11, 35, 40, 51. Quadratum ergo ipsius h a habebit partes 84, & minuta 30, 56, 41, 29, 49, 18, 43, 21: quæ iuncta quadrato ipsius f h, conficiunt quadratum ipsius f a, per ipsam 47 primi elementorum, partium quidem 1103, & minutorum 11, 21, 41, 29, 49, 18, 43, 21. Horum autem quadrata radix, seu recta f a, habet partes 33, & minuta 12, 51, 27, 37, ferè. Per nonam itaque propositionē libri primi, tertia proportionalis f k habebit partes 32, & minuta 20, 36: & horum quadratum partes 1046, & minuta 5, 28, 21, 36. A quibus si detrahatur quadratum ipsius f h, relinquetur quadratum ipsius h k, partium quidem 27, & minutorum 25, 3, 21, 36: quorum radix quadrata, siue recta h k, habet partes 5, & minuta 14, 10, 15, 16. Et proinde tota c k erit partium 56, & minutorum 2, 34, 34, 25. Atqui propter ipsa triangula c a d & c k l inuicem æquiangula, est per quartam sexti elementorum, ut c a ad ipsam a d, sic recta c k ad ipsam k l. Tres autem primæ notæ sunt, nota erit igitur quarta proportionalis k l, offendetúrque habere partes 35, & minuta 13, 45, 15, 28, 18: quæ duplata, efficiunt totam k l lineam rectam partium 70, & minutorum 27, 30, 31, ferè. Tantum est itaque latus pētagoni, in dato circulo descripti: nam tantum quoque, ex Ptolemæi deprehenditur calculo: paucis duntaxat minutis exceptis, ex toties iterata quadratæ radicis, & cubicæ pariter inuentione non præcisa, tantáque supputationum multitudine, bono iure deperditis, & proinde nihili faciendis. Idem pendenter ostendere licebit, de dato cuiusuis alterius polygoni æquilateri & æquianguli latere.

¶Laterum insigniorum aliquot polygonorum regularium, in dato circulo describendorum, particularis adinuentio.

¶Iuuat insuper electorum aliquot, insigniorúmue polygonorum regularium, in dato itidem circulo describendorum, à numeris potißimum adinuicem primis denominatorum latera, peculiaribus, recénsque à nobis excogitatis adinuentionibus reddere nota: non alio quidem, quàm oculari, 3

lari, & ad iustam circini rationem examinato discursu confirmare: id enim præsens cogeretur excedere uolumen. Exponatur igitur datus circulus a b c d, binis dimetientibus a c & b d in illius centro e ad rectos sese inuicem dirimentibus angulos, in quatuor quadrantes distributus. Sit præterea circunscripti quadrati latus f g, bifariã diuisum, & ipsum contingens circulum in puncto b, atque ad rectos angulos cum b e semidiametro constitutum: unà cum eiusdem circunscripti quadrati semidiametris e f & e g, circunferentiam in punctis h & i secantibus. Connectantur postmodum f i & g h lineæ rectæ, eandem circunferentiam in punctis k & l intersecantes, atque b e semidiametrum in communi puncto m. Et connexis h i & k l lineis rectis, ipsi b m æqualis secetur b n. In primis igitur, utraque f i & g h erit latus trigoni regularis in dato a b c d circulo descripti: recta uero h i latus quadrati, & f n latus pentagoni, atque ipsa k l latus heptagoni quod in eodem circulo describi-

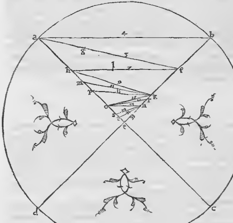


tur, cui æqualis est dimidia utriusque f i & g h. Latus porrò nonagoni itidem regularis, continet bis subtensam h k: cuiusmodi est ipsa h o. Secet autem h i ipsum e b semidiametrum in signo p, & ipsa h p diuidatur proportionaliter in puncto q, cuius segmentum maius sit h q, quod bifariam diuidatur in puncto r: connexa etenim recta b r, erit latus undecagoni. Item si r q bifariam diuidatur in puncto s, & connectatur b s linea recta: ea erit latus tredecagoni. Quòd si n g bifariam diuidatur, in signo t: erit n t uel t g recta, latus quintidecagoni. Si autem ipsi h r uel r q, æqualis feceturp u, & connectatur b u linea recta: illa erit latus polygoni regularis habentis latera 17. Latus autem polygoni laterum 19, erit segmentum h s. Et si u i proportionaliter diuidatur in puncto x, cuius segmentum maius sit i x: erit idem segmentum maius latus polygoni regularis habentis latera 21. Segmentum insuper minus ipsius h p, hoc est p q, est latus polygoni laterum 23. At si recta g i proportionaliter diuidatur in puncto y, cuius segmentum maius sit g y: erit idem maius segmentum, latus polygoni habentis latera 25. Diuidatur consequenter p i recta proportionaliter, cuius segmentum maius sit p z, hoc est, feceturipsi h q æqualis p z, & ex centro e per punctum z, educatur semidiameter e &: erit enim chorda i &, latus polygoni regularis laterum 27. Segmentum autem h r, aut illi æquale r q, erit latus polygoni habẽtis latera 29. Dimidiũ tãdem ipsius g t, facit latus polygoni regularis laterum 31. Cæterorum autem polygonorum latera, in ipsam coincidere uidentur circunferentiã, ob illorum exiguam magnitudinem: de his ergo satis. ¶Nec te ignorare putamus, semidiametrum esse latus hexagoni: & ex quarta circunferentiæ parte bifariam diuisa, oriri latus octogoni: ex quinta uerò, latus decagoni: atque ex sexta eiusdem circunferentiæ parte, bifariam itidem diuisa, prodire latus dodecagoni. Et in hunc modum de cæteris polygonorum lateribus, tam à pariter paribus, quàm ab impariter paribus numeris denominatorum: semper enim ex descripto quouis polygono regulari, consurgit polygonum duplatum habens laterum numerum.

¶Idem aliter.

¶SVPRADICTORVM DENIQVE POLYGO- 4
norum regularium, ab ipsis potissimum numeris adinuicem primis denominatorum

nominatorum latera, sequenti poterunt artificio colligi. Resumatur ergo circulus a b c d, cuius centrum e, binis dimetientibus a c & b d orthogonaliter sese inuicem dirimentibus in quatuor quadrantes distributus: eligatúrque unus ipsorum quadrantum in futuram laterum inuentionem, utpote a e b. Diuidatur postmodum e b semidiameter per mediam & extremam rationem, seu proportionaliter in puncto f, cuius segmentum maius sit e f: & connectantur a b & a f lineæ rectæ. Abscindatur insuper ex a f tertia pars, quæ sit a g, cui æqualis fiat a h: & connectatur f h linea recta. Consequenter e f bifariam diuidatur, in ipso quidem puncto k: & connectatur recta h k. Diuidatur præterea f h recta proportionaliter in puncto l, cuius segmentum maius sit f l,



cui æqualis ſecetur a m: & connectatur k m *linea recta. Diuidatur conſequenter recta* e k *proportionaliter in puncto* n*, cuius ſegmentum maius ſit* e n*, cui æqualis ſecetur* e o*: & connectatur* k o *&* o n *lineæ rectæ. Ipſi deinde* k o*, æqualis ſecetur* o p*: & connectatur* k p *linea recta. Diuidatur præterea* n k *recta proportionaliter, in puncto uidelicet* r*, cuius ſegmentum maius ſit* n r*: & connectatur* o r *linea recta. Cæterum diuidatur* e o *recta bifariam, in puncto quidem* s*: & connectatur recta* n s*. Tandem recta* e s *proportionaliter diuidatur, in puncto ſcilicet* t*, cuius ſegmentum maius ſit* e t*: & connectatur* n t *linea recta.*

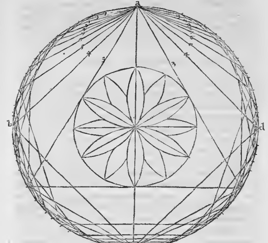
¶*His in hunc modum conſtructis, duplum in primis ipſius* f h *erit latus trigoni regularis in dato circulo deſcripti: a b uerò, latus quadrati: a f autem, pentagoni latus: & ipſa* f h*, latus heptagoni: deinde* h k*, latus nonagoni: &* k m *recta, undecagoni latus:* k p *uerò, tredecagoni: Sed* k o*, latus polygoni laterum 17: &* o r*, laterum 19:* n o *uerò, laterum 23: atque* n s*, latus polygoni habentis latera 29: &* n t*, eius quod habet latera 31:* n e *tandem, latus polygoni (regularis ſemper uelim intelligas) cuius latera ſunt 33. Cætera autem intermediorum polygonorum, tam à pariter paribus, quàm paribus impariter numeris denominatorum latera: uti proxima parte dictum eſt, & cuiuis erudito manifeſtum, ueniunt pendenter colligenda. Hæc igitur ſint ſatis.*

¶Corollarium.

¶*Inuentis itaque lateribus datorum quorumuis polygonorum regularium, in dato quopiam circulo deſcribendorum, ueluti ſupra multifariã traditum extitit: nota erunt, tanquam ex archetypo, ſimilia latera, in quouis alio circulo delineanda. Sicut enim ſe habet ſemidiameter circuli, ad dati polygoni latus in eodem circulo deſcripti: ſic ſe habebit alterius cuiuſcunque circuli diameter, ad ſimilis polygoni latus, quod in ipſo circulo deſcribendum proponitur.*

¶*In maiorem ſupradictorum expreſſionem, & fidem oculatam eorum quæ diximus, ſequentem libuit addere circulum, utrique duorum antecedentium æqualem: In quo primaria aliquot, pro figuræ capacitate, deſcribuntur polygona, iuxta rationem alterutrius proximarum traditionum delineata.*

PROPO-



PROPOSITIO IIII.

DAtam quamuis rectilineam figuram, etiam irregularem, in circulum eidem figuræ rectilineæ æqualem, consequenter transmutare.

1 ¶RECTILINEAM APPELLAMVS FIGVRã, *quæ sub quotcũque lineis rectis cõtinetur: siue illa fuerit regularis, hoc est, æquilatera & æquiangula: siue de earum numero, quæ neque laterum, neque angulorum obseruant æqualitatem, & irregulares dictæ sunt. Si datæ igitur rectilineæ figuræ æquale parallelogrammum rectangulum describatur, per 45 primi elementorum, & ipsi rectangulo parallelogrammo quadratum figuretur æquale, per ultimam secundi*

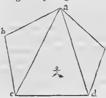
eorundem elementorum: huic demum quadrato describatur æqualis circulus, per sextam, septimam, octauam, aut nonam propositionem antecedentis secundi libri: Erunt ambo, & data figura rectilinea, & descriptus ipse circulus, eidem quadrato æqualia: & proinde æqualia adinuicem.

¶De rectilineorum uarietate, notanda.

¶ *Si datum itaque rectilineum, fuerit in primis triangulum: illud in parallelogrammum rectangulum, per 42 primi elementorum immediatè resoluetur. Si fuerit autem rectilineum ipsum quadrilaterum, & simul parallelogrammum rectangulum: nulla opus erit reductione, præterquam in quadratum. Quòd si idem quadrilaterum, fuerit rursum parallelogrammum, sed obliquiãgulum, utpote Rhombus, aut rhomboides: illud tunc in rectangulum uel facilè connectetur, descripto in eadem basi, & in eisdem parallelis cum ipso rhombo uel rhomboide rectangulo parallelogrammo: illa enim erunt inuicem æqualia, per 35 ipsius primi elementorum. At si præfatum quadrilaterum, fuerit trapezium: illud in duo partiendum erit triangula, & demum ipsa triangula in parallelogrammum rectangulum eidem trapezio æquale resoluenda, per ipsam 45 primi elementorum. Idem quoque faciendum esse uelim intelligas, de rectilineo multilatero, tam regulari, quàm irregulari, in triangula pro laterum multitudine distributo: cuius transmutationem in figuram circularem, sequenti placet exemplo declarare.* 2

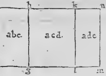
¶Exemplum de rectilineo pentagono irregulari.

¶SIT IGITVR DATVM IRREGVLARE PENtagonum, *a b c d e, cui oporteat circulum æqualem describere. Resoluatur ergo idem pentagonum a b c d e, in parallelogrammum rectangulũ,* 3

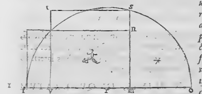


in hunc qui sequitur modum. Connectantur a c & a d lineæ rectæ: & dato triangulo a b c, æquale parallelogrammum cõstruatur f g h, in dato angulo recto qui a d f, per 42 primi elemẽtorum. Ad latus deinde g h ipsius descripti f g h parallelogrammi, & in dato angulo recto qui a d g, dato triangulo a c d, æquale parallelogrammum

logrammum construatur g h k l: atque rursum ad latus k l ipsius g h k l parallelogrammi, dato triangulo a d e, æquale fabricetur parallelogrammum k l m n, in dato angulo recto qui ad l, per 44 eiusdem primi

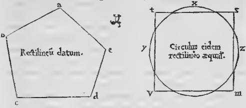


elementorum. Hæc itaque tria parallelogramma rectangula erunt, per primam diffinitionem secundi elementorum: & unum constituentia parallelogrammum, itidem rectangulum, scilicet f n, ipsi dato irregulari pentagono a b c d e æquale, per 45 ipsius primi elementorum. Verùm ubi datum pentagonum foret æquilaterum, & æquiangulum, ipsa triangula a b c, a c d, a d e, æqualia essent adinuicem: & ipsa consequenter f g h, g h k l, & k l m n parallelogramma: Sufficeret itaque unicum describere parallelogrammũ rectangulum, uni prædictorum triangulorum æquale: atque illo ter sumpto, conficere præfatum rectangulum parallelogrammum f n. Hoc igitur rectangulum parallelogrammum f n, erit aut quadratum, uel altera parte longius. Si contingat illud esse quadratum, expeditè magis absoluetur propositionis intentio. Si uerò altera parte longius (ut præassumpto accidisse uidetur exemplo) illud in quadratum æquale resoluendum erit, in hunc qui sequitur modum. Producatur igitur f m, alterum uidelicet longiorum laterum ipsius parallelogrammi rectanguli f n, in directum & continuum uersus o: seceturque ipsi m n æqualis m o, per tertiam primi elementorum. Tota postmodum f o, bifariam diuidatur in puncto r, per decimam ipsius primi elementorum.



Et centro r, interuallo autem r f aut r o, semicirculus describatur f s o: producaturque recta m n, in circunferentiæ punctum s. Clarum est igitur ex ultima secundi prædictorũ elementorum, quadratum quod ex m s describitur (utpote m s t u) æquũ esse parallelogrammo rectangulo f n. Itaque si eidem quadrato m s t u,

æqualis describatur circulus, per decimam, uel undecimam propositionem antecedentis secundi libri, utpote x y z: is erit æqualis ipsi dato pẽtagono irregulari a b c d e. Haud aliter, dato quouis alio multangulo rectilineo, illud in circulum æqualem transformare licebit.



¶Corollarium.

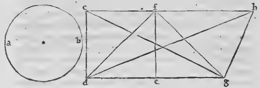
¶*Dabitur itaque circulus, pluribus & diuersis rectilineis figuris simul iunctis æqualis. Quælibet enim rectilinea figura, diuisibilis est in triangula: & omnibus illarum triangulis, construi potest æquale rectãgulum parallelogrammum, per 42, 44, & 45 primi elementorum. Cui quidem rectangulo parallelogrammo, dabitur æquale quadratum, per ultimam secundi eorundem elementorum: & ipsi demum quadrato, æqualis circulus describetur, per sextam, septimam, octauam, aut nonam propositionem antecedentis libri secundi. Hic ergo circulus, eisdem figuris rectilineis in ipsum generale rectangulum parallelogrammum coadunatis, de necessitate coæquabitur: utrunque enim, & præfatum rectangulum singula datarum figurarum referens triangula, & circulus ipse, eidem quadrato erunt æqualia, & proinde æqualia adinuicem.* 4

PROPOSITIO V.

CIrculum datum, in rectilineam quamuis trilaterã, aut quadrilateram reuocare figuram: similiter & in multilateram regularem, sub æqualibus lateribus & angulis comprehensam.

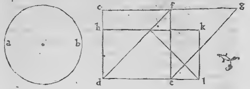
¶CIRCVLVS IN PRIMIS, IN QVADRATVM *æquale, per sextã, septimam, octauã, aut nonam propositionem antecedentis secundi libri trãsmutatur. Et proinde, si in dupla basi, & in eisdẽ parallelis*

parallelis cum ipso quadrato eidem circulo æquali, triangulum rectangulum, obtusiangulúmue, seu acutiangulum describatur: Ipsum triangulum erit in primis eidem quadrato æquale, & ipsi consequenter dato circulo. Omne siquidem quadratum, est parallelogrammum: & omne parallelogrammũ, duplum est trianguli quod in eadem basi, & in eisdẽ parallelis cum ipso describitur parallelogrammo, per 41 ipsius primi elementorum. Necessum est igitur, idem quadratum æquum esse triangulo, quod in dupla basi, & in eisdem consistit parallelis cum ipso quadrato: Velut ex quadragesimæ secundæ eiusdem primi elementorum discursu, uel facilè colligitur, & subscripta uidetur indicare figura. In qua dato a b circulo, quadratum æquale descriptum est c d e f: & triangula consequenter c d g, g f d & d g h, eidem quadrato c d e f, & ipsi propterea circulo dato, conscribuntur æqualia.



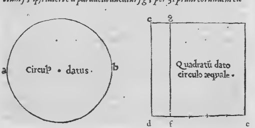
2 ❡QVOD SI PRAEFATVM CIRCVLVM, IN *liberum quoduis libuerit transmutare quadrilaterum, quod simul (uelim intelligas) sit parallelogrammum (quoniam perfecti ad imperfectũ, hoc est circuli ad irregulare quadrilaterum reuocatio, uana est, atque prorsus negligenda) sic facito. Discindatur quadratum ipsi dato circulo æquale, in duo triãgula: & alteri eorum, ad datam lineam rectam, & in dato angulo rectilineo (utpote recto, acuto, uel obtuso) æquale parallelogrammum describatur: similiter & reliquo triangulo, ad latus prioris parallelogrammi, & in eodem angulo dato, æquale rursum describatur parallelogrammum, per 44 primi elementorum. Hæc enim duo parallelogramma, per sequentem 45 eiusdem primi elementorum, unum efficient parallelogrammum, ad datam lineam rectam, & in dato angulo rectilineo descriptum. Erit igitur ex ipsis duobus parallelogrammis resultans parallelogrammum, eidem quadrato æquale: & ipsi dato*

propterea circulo. In quorum exemplum, subscripta cõtempletur figura: in qua dato rursum a b circulo, & quadrato c d e f eidem circulo æquali, bina describuntur parallelogramma f d e g & h d l k, eidem quadrato c d e f, & ipsi consequenter dato circulo a b, atque inuicem æqualia.

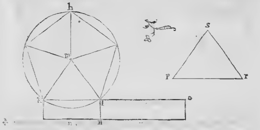


¶Inuentio lateris polygoni regularis, dato circulo æqualis.

¶CVM PORRO EVNDEM CIRCVLVM, IN multilateram, *sub pluribus uidelicet quatuor lateribus & angulis inuicem æqualibus comprehensam figuram, reducere fuerit operæpretium (quod neminem hactenus tentasse, nedum fecisse comperimus) hac procedito uia. Esto datus circulus a b, quem oporteat in pentagonum (uerbi gratia) æquilaterum & æquiangulum resoluere, quod ipsi dato circulo sit æquale. Construatur in primis ipsi dato circulo æquale quadratum c d e, per sextam, septimam, octauam, aut nonam propositionem antecedentis secundi libri. Et a b ipsius quadrati latere, utpote d e, quinta pars abscindatur, per nonam sexti elementorum, quæ sit d f: atque per punctum f, ipsi lateri c d parallela ducatur f g, per 31 primi eorundem ele-* 3



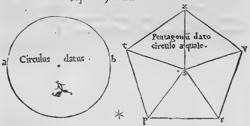
mentorum. Erit ergo d f g rectangulum parallelogrammũ, quinta pars ipsius quadrati c d e: & proinde quinta itidem pars ipsius dati circuli a b. Parallelogramma enim c d e & d f g, sub eodem uertice g constituta, se habent ut bases d e atque d f, per primam sexti elementorum. His præmissis, exponatur pentagonum aliquod æquilaterum & æquiangulum h k l, in dato circulo (cuius centrum m) per antecedentem secundam aut tertiam propositionem descriptum: & quinque eiusdem circuli semidiametris, in quinque isoscelia & inuicem æqualia triangula distributum, quorum unum sit m k l. Describatur consequenter ipsi d f g parallelogrammo rectangulo æquale rectilineum, & ipsi triangulo m k l simile: in hunc uidelicet modum. Ad datam lineam rectam k l (quæ latus est assumpti pentagoni) ipsi triangulo m k l, æquale parallelogrãmum rectangulum describatur k l n. Deinde ad latus l n, ipsi parallelogrammo rectangulo d f g, æquale parallelogrammum itidem rectangulum describatur n l o, per ipsam 44 primi elementorum. Tãdem inter k l & l o, media proportionalis inueniatur, per 13 sexti eorundem elementorum, quæ sit p r: super quam describatur triangulum s p r, ipsi triangulo m k simile, per 18 eiusdem sexti elementorum.



Erit igitur rectilineum s p r triangulum, & æquiangulum ipsi triangulo m k l: atque unum eius latus, scilicet p r, similis rationis cum ipso k l: atque reliqua duo latera p s & r s inuicem æqualia, & similia lateribus k m & m l inuicem pariter æqualibus. Idem præterea triangulum s p r, æquum est ipsi rectangulo parallelogrammo n l o: quod ipsi d f g,

f

hoc eſt, quintæ parti tam quadrati c d e, quàm dati a b circuli, per ipſam æquatur conſtructionem. Triangulum itaque s p r eſt quinta pars, & p r latus ipſius pentagoni æquilateri & æquianguli, quod ipſi dato æquum eſt circulo. Eſt autem (uti ſupradictum eſt) ipſi triangulo m k l ſimile: & ex ſimilibus rectilineis, numero æqualibus, & eodem modo ſumptis, ſimilia conſurgunt rectilinea. Si deſcribantur igitur ſuper latera p s & s r, triangula p s t & r s u: & rurſum ad latera s t, & s u, triangula, s t x & s u x, eidem triangulo s p r, atque inuicem ſimilia, per 18 ſexti elementorum, cum ipſo triangulo s p r quinarium triangulorum adimplentia numerum: Conflabitur ex ipſis quinque triangulis, pentagonum æquilaterum & æquiangulum p t x u r, ipſi pentagono h k l ex omni parte ſimile, atque ipſi quadrato c d e, & dato conſequenter circulo a b æquale. ¶ Haud aliter, eidem circulo dato, aliud quoduis polygonum æquilaterum & æquiangulum, à quocunque libuerit numero denominatum, æquale deſcribetur.



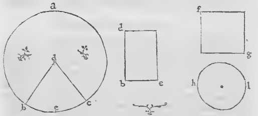
¶Corollarium primum.

¶Vnicuique igitur ordinatæ parti circuli, hoc eſt, per datum numerum 4
expreſſæ, quemadmodum & toti circulo: liberũ & æquale rectilineũ, pendenter deſcribi poterit. Cùm enim per primam aut ſecundam propoſitionem antecedentis ſecundi libri, circunferentiæ dati cuiuſlibet circuli æqualis recta deſcribatur, à qua, per nonam ſexti elementorum ordinata pars abſcinditur: Si dimidium ipſius ordinatæ partis in rectam lineã priùs conuerſæ, ducatur in ſemidiametrũ eiuſdẽ circuli, fiet rectãgulum

gulum æquale ſectori, ipſam datam circuli partem ordinatam exprimẽti. Nam quemadmodum ex dimidia circunferentia in ſemidiametrum, fit rectangulum ipſi dato circulo æquale: ſic ex dimidia baſi, dimidióue ſectoris arcu, in eundem ſemidiametrum, conſurgit rectangulum eidem ſectori, ſiue ordinatæ parti circuli æquale. Huic autem rectangulo æquale quadratum deſcribitur, liberúmue triangulum, aut parallelogrãmum, ſeu datum quoduis æquilaterum & æquiangulum polygonum æquale, per ea quæ nuper fuere demonſtrata. Corollarium igitur, *ex omni parte uerum.*

¶Corollarium ſecundum.

5 ¶*Eidem rurſum ordinatæ parti, datóue ſectori circuli, dabitur & circulus itidem æqualis. Vtpote, ſi dati circuli a b c abſcindatur ſector b d c, ſub duobus ſemidiametris b d & d c, & arcu b c comprehenſus, qui ſit quinta (uerbi gratia) circunferentiæ pars: clarum eſt, ipſum ſectorem b d c quintam itidem circuli partem continere. Quòd ſi idem arcus b c diuidatur biſariam in puncto e, per 30 tertij elementorum: utraque pars b e uel e c, erit decima pars eiuſdem circunferentiæ.* Si tota igitur circũ*ferentia, uertatur in lineam rectam, per primam, aut ſecundam propoſitionem antecedentis ſecundi libri: & ab eadem recta abſcindatur pars decima, per nonam ſexti eorundem elementorum, quæ uocetur b e: comprehenſum ſub ipſa b e & d b ſemidiametro rectangulum d b e, eidem ſectori erit æquale, & proinde quintæ parti ipſius dati circuli.* Ipſum porrò *rectangulum d b e, uertetur facilè in quadratum, per ultimã ſecundi prædictorum elementorum: ſit illud, quadratum f g.* Huic demũ



quadrato f g, æqualis circulus describatur h l, per sextam, septimam, octauam, aut nonam propositionem eiusdem antecedentis secundi libri. Is enim circulus h l, æqualis erit ipsi b d e rectangulo: & ipsi propterea sectori b d c. Quatuor enim, utpote sector b d c, rectangulum d b e, quadratum f g, & circulus h l, æqualia sunt adinuicem: & unumquodque pars quinta, ipsius dati circuli a b c.

¶Subcorollarium.

¶ *Hinc rursum fit manifestum, circulum posse discindi in quotlibet circulos æquales adinuicem. Cùm enim circunferentia diuidi possit in quotcunque partes inuicem æquales, per secundum corollarium antecedentis primæ propositionis: circulus proinde diuidetur in quotcunque libuerit sectores, & demum in totidem æquales circulos, per ea quæ nuper fuere demonstrata.* 6

¶Corollarium tertium.

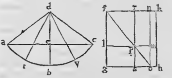
¶*Omnis denique sector, similiter & sectio data circuli, in rectangulum quoduis, seu polygonum regulare, uel in circulum æqualē transmutabitur. In primis enim, si sector fuerit pars quota, siue ordinata circuli: patuit ex proximo corollario, qualiter idem sector in rectangulum transmutatur, & ipsum rectāgulum in quadratum, & quadratum demum in datum polygonum regulare, aut in æqualem circulum. Porrò si datus sector fuerit contingenter assumptus, non existens quota siue ordinata pars circuli: dimidius arcus ipsius sectoris, in rectam lineam conuertatur, per primam partem sexti documenti antecedentis primæ propositionis: & comprehensum sub ipsa linea recta, & semidiametro circuli rectangulum, eidem sectori coæquabitur. Quod (ueluti nuper ostensum est) in quadratum, aut polygonum regulare, uel in ipsum reuocabitur circulum.* 7 a

¶Secunda pars, de sectione circuli.

¶*Data porrò circuli sectio, in rectangulum inprimis, hoc modo conuertetur. Sit igitur data circuli sectio a b c, & ipsius circuli centrum d. Compleatur eiusdem circuli sector d a b c: cuius arcus a c sub d e b semidiametro bifariam diuidatur, in ipso quidem puncto b, chorda uerò sectionis in puncto e. Vertendus erit sector d a b c, in quadrilaterum rectāgulum, per primam partem huius corollarij: utpote, in rectangulū f g h k. Deinde, triangulum isosceles d a c, in rectangulum itidem uenit conuertendum, sub d e perpendiculari & dimidia basi e c cōprehensum:* b

cui

cui æquale sit f l m n. Erit igitur rectāgulum f l m n, minus ipso f g h k: cùm triangulum d a c, sit pars sectoris d a b c. Producatur ergo n m, ad partes quidem m, in punctum o ipsius lateris g h: & connectatur dimetiens f o, cuius intersectio cum latere l m, sit p. Per punctū denique p, utrique ipsarum f g & n o, parallela ducatur r p s, per 31 primi elementorum. Erit igitur f g s r rectangulum, æquale ipsi f l m n (supplementum enim g p, æquum est supplemento p n, per 43 ipsius primi elementorum, & utrique commune l r) & proinde æquale ipsi triangulo d a c. Et *quoniam totum rectangulum f g h k, æquum est toti sectori d a b c: reliquum ergo rectangulum r s h k, reliquæ parti eiusdem sectoris, utpote, sectioni a b c de necessitate coæquatur.* Hoc autem rectangulum *r s h k, uertetur aut in quadratum, & postmodum in circulum: aut in polygonum quoduis æquilaterum, & æquiangulum: ueluti supradictum est.*



¶Sectionis in sectorem reductio.

c ¶*Adde, quòd si latus s h, in arcum eiusdem reuocetur circuli, per secundam partem sexti documenti antecedentis primæ propositionis, cui æqualis fiat uterque b t & b u, & cōnectantur d t & d u semidiametri: fiet sector d t b u, eidem sectioni a b c æqualis: uterque enim æquabitur rectangulo r s h k.*

PROPOSITIO VI.

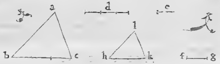
DAtæ cuiuis rectilineæ figuræ, similem rectilineam figuram, sub quauis ratione data maiorem uel minorem describere.

¶VT TANDEM RECTARVM INVICEM PROportionalium *usum, fructūmue amplius dilucidemus: nō incommodum duximus hoc loco demonstrare, qualiter unicuique figuræ planæ rectilineæ, dein circulari, similis figura, sub quauis ratione data maior aut*

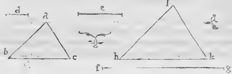
minor describenda sit. Id enim multarum, tum subtilium, tum utilium rerum adinuentionibus, haud parum poterit inseruire.

¶Prima pars, de triangulo.

¶*Ab ipso itaque triangulo, rectilineorum primo, fœliciter exordiamur.* 1 *Sit igitur datum triangulum a b c, cui expediat simile, similitérque positum describere triangulum: in ea quidem ratione maius, aut minus, quam habet linea d ad lineam e. Suscipiatur itaque liberum aliquod ipsius trianguli latus, utpote b c: & datis tribus lineis rectis, d scilicet, & e, atque b c, quarta proportionalis inueniatur f g, per duodecimam sexti elementorum. Inter ipsas posimodum rectas b c & f g, media proportionalis inueniatur h k, per 13 ipsius sexti elementorum. Deinde super eadem h k, dato a b c triangulo, simile similitérque positum triangulum describatur l h k, per 18 eiusdem sexti elementorum. Clarum est igitur, ex succedentis decimænonæ propositionis ipsius sexti demonstratione, triangulum a b c ad triangulum l h k eandem habere rationem, quam b c recta, ad rectam h k. Vt autem b c recta, ad rectam h k: sic, per constructionem, d ad e. Et triangulum igitur a b c, ad simile similitérque positum triangulum l h k eandem rationem obtinebit, quam d recta, ad rectam e, per undecimam quinti elementorum. Si igitur d recta, ad e rectā maioris inæqualitatis rationem habuerit: triangulū a b c, proportionaliter maius erit ipso triangulo l h k: ut in subscripta figura.*

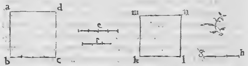


Si autem ratio ipsius d rectæ, ad e rectam, minoris fuerit inæqualitatis: idem triangulum a b c, ipso triangulo l h k proportionaliter minus erit: uelut ea quæ sequitur figuræ descriptio monstrat.

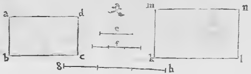


¶Secunda pars, de quadrangularibus figuris.

2 ¶DE QVADRANGVLARIBVS AVTEM, TAM *rectangulis, quàm obliquiangulis figuris, quæ parallelogramma nuncupantur, utpote quadrato, altera parte longiore, rhombo, atque rhomboide: idem pendenter esse faciendum, uelim non ignores. Vt si dato in primis quadrilatero rectangulo* a b c d, *simile, similitérque positum rectangulum describere fuerit operæpretium, in ea quidem ratione, quam habet* e *magnitudo, ad* f *magnitudinem: uno ipsius rectanguli electo latere, utpote* b c, *& in tertiam magnitudinem post* e *&* f *coassumpto, quarta proportionalis, inueniatur* g h, *per ipsam* 12 *sexti elementorum.* Et *per sequentem* 13 *ipsius sexti elementorum, inter* b c *&* g h *media rursum proportionalis inueniatur* k l. *Tandem super ipsa* k l, *dato rectangulo* a b c d, *simile, similitérque positum describatur* m k l n, *per ipsam* 18 *eiusdem sexti elementorum. Et quoniam tres lineæ rectæ* b c, k l, g h, *continuè sunt proportionales: est igitur, ut* b c *ad* g h, *sic rectangulum* a b c d, *ad simile similitérque positum rectangulum* m k l n, *per ipsius* 19 *sexti elementorum corollarium. Sicut porrò* b c *ad* c h, *sic per constructionem* e *ad* f. *Et sicut igitur* e *ad* f, *sic per undecimam quinti eorundem elementorum rectangulum* a b c d, *ad ipsum rectangulum* m k l n. *Itaque si magnitudo* e, *sit maior* f *magnitudine, rectangulum* a b c d, *ipso* m k l n *rectangulo proportionaliter erit maius: ut subscripta prædictorum uidetur ostendere figura.*



Si autem præfata magnitudo e, *ipsa* f *minor extiterit, idem rectangulum* a b c, *ipso* m k l n *rectangulo sub eadem ratione minus erit: quemadmodum ex ea quæ sequitur potes elicere descriptione.*

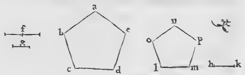


Haud dißimili uia, cætera quadrilatera, & obliquiangula parallelogramma, rhombus uidelicet, atque rhomboides, nec non & ea quæ trapezia nuncupantur: pro data ratione proportionaliter augentur, minuunturue. Quæ cùm ex iis, quæ de quadrangulis rectangulis nuper ostensa sunt, uel facilè deprehendantur: de ipsorum obliquiangulorum, & irregularium quadrilaterorum augmento, uel decremento, uerbum addere consultò superſedemus.

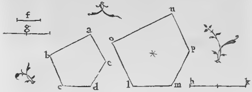
Tertia pars, de figuris quæ multilateræ dicuntur.

OMNES TANDEM MVLTILATERAE, TAM 3 *regulares, quàm etiam irregulares figuræ rectilineæ, haud dißimili uia sub quauis ratione data ueniunt augendæ uel minuendæ. Vt si fuerit (exempli gratia) datum pentagonum a b c d e, cui oporteat simile similitérque positum pentagonum deſcribere: in ea quidem ratione, quam habet recta linea f, ad g lineam rectam. Sumpto igitur uno eiusdem pentagoni latere, utpote c d, quarta proportionalis inueniatur h k, per ipsam 12 sexti elementorum: sicut uidelicet f ad g, sic latus c d ad ipsam h k. Et rursum per 13 ipsius sexti, inter c d & h k, media proportionalis inueniatur l m. Tandem, super ipsam l m, dato pentagono a b c d e, simile simitérque positum pentagonum deſcribatur n o l m p, per sæpiùs allegatam 18 sexti elementorum. Cùm igitur tres lineæ rectæ c d, l m & h k, sint inuicem proportionales: erit per secundum corollarium uigesimæ eiusdem sexti elementorum, ut recta c d ad rectam h k, sic a b c d e pentagonum, ad simile similitérque deſcriptum pentagonum n o l m p. Sicut porrò c d recta, ad rectam h k: sic per constructionem f, ad g. Et sicut igitur, per undecimam quinti elementorum, f ad g: sic datum pentagonum a b c d e, ad ipsum pentagonum n o l m p. Et proinde si f recta, fuerit maior ipsa g: datum pentagonum a b c d e, proportionaliter maius erit ipso n o l m p. Vt in subſcripta figura uides obſeruatum.*

Et si



Et si f magnitudo, minor fuerit eadem g: minus erit proportionaliter idem a b c d e pentagonum, ipso pentagono n o l m p. Vt ea quæ sequitur uidetur ostendere figura: in qua pentagonum irregulare a b c d e, sub data ratione quæ f ad g, proportionaliter est augmentatum.

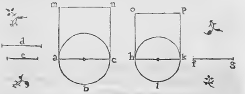


PROPOSITIO VII.

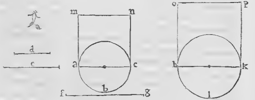
Circulum datum, atque illius partes, utpote sectores, & sectiones, sub quauis ratione data proportionaliter augere, uel minuere.

1 ¶RELIQVVM EST TANDEM, AD CIRCVLOrum *sub ratione data augendorum uel minuendorum peruenire descriptionem: quā ex iis, quæ de rectangulis parallelogrammis, secunda parte antecedentis sextæ propositionis tradita sunt, pendere fit manifestum. Cùm enim circuli sese inuicem habeant, sicut ex illorum dimetientibus descripta quadrata, per secundam duodecimi elementorum: eosdem circulos datos non aliter augebimus, aut minuemus, quàm ipsa dimetientium quadrata: quemadmodum eadem secunda parte ipsius antecedentis propositionis dilucidatum extitit. Vt si datus fuerit circulus a b c, cuius dimetiens a c, & operæpretium sit alium describere circulum, ad quem idem circulus a b c eandem rationem habeat, quam d recta ad rectam e. In primis sumenda erit quarta proportionalis f g, ad quam uidelicet dimetiens a c eandem rationem obtineat, quam d recta ad rectam e, per ipsam 12 sexti elementorum. Deinde, per 13 ipsius sexti, media proportionalis inueniatur h k: quæ fiat diameter circuli h l k. Ex ipsis demum a c & h k dimetientibus, quadrata describantur a m n c, & h o p k, per antepenultimam primi elementorum. His in hunc mo-*

dum constructis, cùm tres lineæ rectæ a c, h k, f g, sint per constructionẽ continuè proportionales: erit per corollarium ipsius 19 sexti elementorum, ut a c recta, ad rectam f g, sic quadratum a m n c, ad quadratum h o p k. Sed ut quadratum ad quadratum, sic circulus ad circulum, per ipsam secundam duodecimi elementorum: atque sicut a c recta, ad rectam f g, sic d ad e, per ipsam constructionem. Erit igitur per undecimam quinti elementorum, ut d recta ad e rectã: sic circulus a b c, ad circulũ h l k. Et proinde, si d recta sit maior e: circulus a b c, circulo h l k proportionaliter erit maior. Vt in sequẽti descriptione obseruatum esse uidetur.



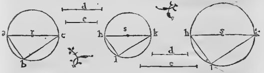
Si autem ipsa d recta, fuerit minor eadem e: minor erit proportionaliter circulus a b c, præfato circulo h l k. Quemadmodum subscripta figuræ delineatio, fidem facit apertam. De cæteris quibuscunque circulis, idem habeto iudicium.



¶De sectore, atque sectione circuli.

¶*De circuli autem sectore, atque sectione, idem pendenter obseruandũ esse uidetur. Quoniam aucto uel diminuto pro ratione data circulo: illius sector, aut sectio data, fit proportionaliter maior, aut minor, dum modo similis describatur. Vt enim totus circulus, ad totum se habet circulum:* 2

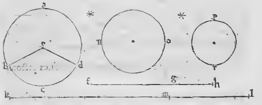
culum: sic pars qualibet similis, ad partem similem. Resumantur, exempli gratia, proximarum descriptionum circuli a b c, & h l k: sitque centrum dati circuli a b c punctum r, & ipsius h l k circuli centrum punctum s. Producto igitur b r semidiametro, connectatur recta b c. Deinde ad centrum s ipsius h l k circuli, dato angulo rectilineo b r c, æqualis angulus rectilineus constituatur l s k, per 23 primi elementorum: & connectatur chorda, seu linea recta l k. Erunt itaque tum sectores, tum sectiones eorũdem circulorum inuicem similes: aio quòd & ipsis circulis proportionales. Quemadmodum uidelicet circulus ad circulum, sic sector ad sectorem, atque sectio ad sectionem similem: & proinde tum sectores, tum sectiones eorundem circulorum, sub data ratione (qualis fuit d ad e) inuicem proportionantur.



¶ Corollarium 1. De diuisione circuli in duos sectores sub ratione data.

a ¶ *Datus ergo circulus, in duos sectores, & in duos tandem circulos, sub data ratione proportionatos diuidetur. Vt si datus fuerit (exempli gratia) circulus a b c d, cuius centrum e, data uerò ratio, quæ f g ad g h: uertenda erit in primis circunferentia circuli in lineã rectã, per primã, aut secundam propositionem antecedentis secundi libri, quæ sit k l. Ipsa postmodum k l recta, eidem f g, secte in puncto g, similiter secanda est, in puncto uidelicet m, per decimam sexti elementorum: sicut quidem f g ad g h, sic k m ad m l. Alterutrum præterea segmentorum ipsius k l, utpote m l, in arcum ipsius dati circuli reuocetur, per sextum documentum antecedentis primæ propositionis: sitque idem arcus b c d, & connectantur e b & e d semidiametri. Reliquus igitur arcus b a d, reliquo segmento k l erit æqualis. Vt autem arcus ad arcum, sic se habet sector ad sectorẽ. Sector igitur e b a d, ad sectorem e b c d eam rationem habet, quam arcus b a d ad arcum b c d: & proinde quam e f, ad f g. Diuisus est itaque*

datus circulus a b c d,in duos ſectores ſub data ratione proportionatos. ¶ *Comprehenſum autem ſub eiuſdem circuli ſemidiametro (ut ad ſecundam partem huiuſce corollarij deueniamus) & dimidio ſegmento k m rectangulum, æquum erit ſectori e b a d: & ſub eodem ſemidiametro, & dimidio reliqui ſegmenti m l contentum rectangulum, reliquo ſectori e b c d coæquabitur: per tertium corollarium antecedentis quintæ propoſitionis. Omne inſuper rectangulum, facilè uertitur in quadratū, per ultimam ſecundi elemētorum: & quadratum tandem in circulum, per decimam, uel undecimam propoſitionem antecedentis libri ſecundi. Sit igitur circulus n o, æqualis ſectori e b a d: ipſi uerò ſectori e b c d, æqualis circulus p r. Datus ergo circulus a b c d: in duos circulos n o & p r, ſub data ratione proportionatos (nempe ſub eadem, qua & ipſi ſectores) tandem ſectus erit.* b

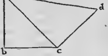


¶Corollarium 2, Quòd pluribus circulis, dabitur unus circulus æqualis.

¶*Ex duobus tandem, uel pluribus circulis, unicus poterit confici circulus, ipſis datis circulis adamuſſim æqualis. Sint (uerbi gratia) duo circuli, in unum circulum in primis reuocandi. Vterque igitur circulus, per ſextam, ſeptimam, octauam, aut nonam propoſitionem ipſius antecedētis libri ſecundi, uertetur in quadratum: & ipſis duobus quadratis, unum æquale quadratum, ex penultima primi elementorum uel facilè colligetur. Cui ſi per decimam eiuſdem ſecundi libri propoſitionem circulus deſcribatur æqualis: is erit æqualis præfatis duobus circulis, à principio datis.* ¶ *Idem ſubſequetur, ubi plures duobus oblati fuerint circuli,* b

utpote

utpote tres. His enim in quadrata conuersis, si duorum primorum quadratorum latera, quæ sint (uerbi gratia) a b & b c, in rectum angulum qui sub a b c constituantur, & connectatur recta a c: clarum est ex ipsa penultima primi elementorum, quadratum quod ex a c describitur, æquum esse descriptis ex a b & b c quadratis. Cōstituatur rursum latus tertij quadrati, utpote c d, in rectum angulum cum a c: & connectatur a d linea recta. Huius itaque quadratum, eis quæ ex a c & c d, & proinde eis quæ ex a b, b c & c d quadratis describuntur, erit æquale. Huic demum quadrato quod ex a d, si æqualis circulus describatur, is erit æqualis præfatis tribus quadratis, quæ ex a b, b c & c d: & ipsis propterea tribus datis circulis æqualis.



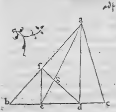
c *¶Idem quoque fieri poterit de datis quibuscunque rectilineis figuris: aut partim rectilineis, partim uero circularibus. Quemadmodum ex supradictis colligere, non est difficile. Possent & alia innumera, non minus utilia, quàm scitu digna, ex præostensis propositionibus, & earum corollarijs subinferri: quæ studiosis rerum mathematicarum (cùm hæc in præsentiarum satis esse uideantur) prosequēda, data relinquimus opera.*

PROPOSITIO VIII.

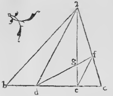
A Dato cuiusuis lateris oblati trianguli puncto, rectā ducere lineam, quæ ordinatam partem ab ipso triangulo discindat.

a ¶VT HVIC LIBRO TERTIO GRATVM FInem imponamus, *iuuat tandem nonnulla de triangulo omnium rectilineorum primo, & in quod cæteræ omnes resoluuntur figuræ rectilineæ, superaddere problemata, non minus quidem utilia, quàm iucunda. Ordinatam itaque partem appellamus, quæ ab aliquo denominatur numero: utpote, dimidiam quæ à binario, tertiam quæ à ternario, quartam quæ à quaternario uidetur accipere denominationem: & in hunc modum de cæteris in infinitum progredientibus numeris, & partibus quotis ab eisdem numeris denominatis. Sit igitur datum triangulum*

a b c, & in aliquo ipsius trianguli latere, utpote b c, designatum punctum d: sitque propositum tertiam (uerbi gratia) partē ab eodem abscindere triangulo, sub recta uidelicet, quæ per d punctum fuerit delineata. Secetur itaque ab ipso latere b c, pars tertia b e, per nonam sexti elementorum. Et connexis a d & a e lineis rectis, per datum punctum e, recta ducatur ipsi a d parallela, per 31 primi eorundē elementorū: & cōnectatur demum recta d f, quæ secet a d rectam in puncto g. Aio itaque, rectam d f abscindere tertiam partem ab ipso triāgulo dato a b c, utpote triangulum d b f. Triangulum enim d a f & d f e, in eadem basi, atque in eisdem consistunt parallelis: æquū est propterea triangulum a d f, ipsi triangulo d f e, per 37 ipsius primi elementorum. Subducto igitur communi triangulo a g d, reliquum triāgulum a f g, reliquo g e d est æquale. Quòd si utrique æqualium triangulorum, addatur commune trapezium f g e b, consurget triangulum d f b æquale triangulo a b e. Et quoniam a b c & a b e triangula, sub eodem sunt uertice: se habent igitur ut bases, per primam sexti elementorum. Basis porrò b e, est tertia pars ipsius b c, per ipsam constructionem: & triangulum igitur a b e, est tertia pars ipsius trianguli a b c. Et proinde triangulum d f b, eiusdem trianguli a b c pars itidem est tertia: quæ enim sunt inuicem æqualia, eiusdem sunt æquè minora, per septimæ communis sententiæ conuersionem. Recta igitur linea d f, abscindit tertiam partem d f b ab ipso triangulo dato a b c. Quod oportuit fecisse. ¶ *Haud aliter datam quamuis aliam partem ordinatam,* b *ex eodem a b c triangulo dato, sub ipsa recta d f discindere licebit: etiam ubi datum punctum d, inter b & e puncta fuerit designatum. Vt ex ea quæ sequitur figuræ dispositione, uel facilè deprehenditur: in qua punctum datum in latere b c est rursum d, & c e recta, eiusdem lateris pars quarta. Descriptis enim, ueluti suprà traditum est, a d, d f, f e & e a lineis rectis, manifestum est rursum triangula a g f & d g e, fore inuicem æqualia: & triangulum consequenter a e c, triangulo*



d f e



d f e æquale, iuncto uidelicet communi trapezio f g e c. Et cùm triangulum a e c, sit quarta pars ipsius dati a b c trianguli: erit propterea triangulum d f c, eiusdem trianguli a b c pars itidem quarta.

PROPOSITIO IX.

Ntra datum triangulum punctum inuenire, à quo in singulos ductæ lineæ rectæ, triangulum ipsum in tria & inuicem æqualia diuidant triangula.

¶SIT OBLATVM TRIANGVLVM A B C, *& ab uno illius latere, utpote b c, tertia pars abscindatur b d, per nonã sexti elementorum. Consequenter per ipsum punctum d, ipsi a b lateri parallela ducatur d e, per 31 primi eorundem elementorum: quæ bifariam diuidatur in puncto f, per decimam eiusdem primi elementorum. Aio itaque, punctum f esse illud quod quærebatur. Connectantur enim a d, a f, f b, f c lineæ rectæ: erunt igitur a b d, a f b triangula in eadem basi a b, atque in eisdem parallelis a b & e d: & proinde inuicem æqualia, per 37 primi elementorum. Triangulum porrò a b d, se habet ad totum triangulum datum a b c, ut b d basis ad basin b c, per primam sexti eorundem elementorum. Atqui b d basis, est tertia pars ipsius b c, per ipsam constructionem: & triangulum igitur a b d, atque ipsum pẽdenter a f b triangulum, tertia itidem pars est eiusdem trianguli dati a b c. Reliqua proinde triãgula a f c, b f c, reliqua duo tertia eiusdem a b c trianguli comprehendunt: quæ cùm sint inuicem æqualia, quodlibet eorundem triangulorum unum tertium*

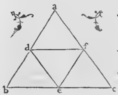


efficit ipsius dati trianguli a b c. Quòd autem a f c & b f c triangula, sint adinuicem æqualia, sit manifestum. Triangulum nanque d f c, triangulo c f e, per primam sexti elementorum est in primis æquale: se habent enim adinuicem, ut bases d f & f e, quæ per ipsam constructionē sunt æquales. Triangulum insuper a e f, triangulo f b d, itidem coæquatur, per 37 primi eorundem elementorum: sunt enim in eisdem basibus inuicem æqualibus d f & f e, atque in eisdem parallelis a b & e d consistentia. Totum propterea a f c triangulum, toti triangulo b f c coæquatur. Diuisum est itaque triangulum datum a b c, in tria triangula inuicem æqualia, sub tribus rectis lineis, à puncto f in singulos prodeuntibus angulos. Quod faciendum receperamus.

PROPOSITIO X.

Datum insuper triangulum, in quatuor æqualia, atque inuicem æquiangula, diuidere triangula.

¶ ESTO RVRSVM DATVM TRIANGVLVM *a b c, cuius unumquodque latus bifariam diuidatur, per decimam primi elementorum: a b quidem in puncto d, & b c in puncto e, atque c a in puncto f. & connectantur d e, d f & f e lineæ rectæ. Diuiditur itaque triangulum a b c, in quatuor triangula a d f, f d e, b d e, e f c: quæ dio in primis esse inuicem æquiangula. Cùm enim a b & a c latera, proportionaliter sint diuisa in punctis d & f: (nempe utrumque bifariam) connexa igitur recta d f, ipsi b c lateri est parallela, per secundam sexti elementorum. Et proinde recta d e, parallela est lateri a c: atque recta e f, lateri a b itidem parallela. Vterque igitur angulorum b d e, e f c, æqualis est angulo qui ad a: & anguli consequenter a d f, f e c, æquales angulo qui ad b: necnon a f d, d e b anguli, ei qui ad c tandem æquales, per 29 primi elementorum: & proinde æquales adinuicem. Aequiangula sunt itaque a d f, b d e, e f c triangula: & unicuique ipsorum triangulorum, æquiangulum triangulum*

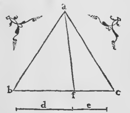


gulum d e f, tum per ipsam 29, tum per 34 primi elementorũ. Aio quòd & præfata triangula quatuor, sunt adinuicem æqualia: quod ex sola 34 primi elementorum, fit manifestum. Parallelogramma enim sunt a d e f, b d f e, d e c f quadrilatera: unumquodque propterea triangulum a d f, b d e, e f c, æquum est ipsi triangulo d e f, quod cuiuslibet trium supradictorum parallelogrammorum est dimidium. Triangulum itaque a b c, in quatuor triangula inuicem æqualia, & æquiangula diuiditur. Quòd faciendum erat.

PROPOSITIO XI.

Datum triangulum in duo partiri triangula, sub data ratione consistentia.

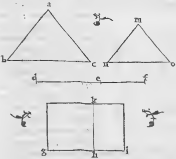
¶SIT DATUM TRIANGULUM A B C, QUOD *expediat in duo partiri triangula, sub ratione quæ est d ad e se habentia. Liberum itaque ipsius trianguli latus, utpote b c, sicut data linea recta, quæ ex d & e resultat, per decimã sexti elementorum diuidatur: in puncto quidem f, ut d scilicet ad e, sic b f ad f c. & connectatur a f linea recta. Aio itaque triangulum a b f, ad triangulum a f c eandem habere rationem, quam d recta ad e. Triangula etenim a b f, a f c, sub eodem sunt uertice: se habent igitur ut bases, per primam ipsius sexti elementorum. Sicut propterea basis b f ad basim f c, sic triangulum a b f ad triangulum a f c: ut autem b f ad f c, sic d recta ad ipsam e. Et sicut igitur d ad e, sic a b f triangulum ad triangulum a f c, per undecimam quinti elementorum. Diuisum est itaque triangulum a b c, in duo triangula sub data ratione consistentia: quod oportebat facere. Idem quoque fiet de parallelogrammis.*



¶PROPOSITIO XII.

OMni triangulo dato, simile similitérque positum triangulum, sub ratione data, aliter quàm superiùs traditum sit, constituere.

¶HOC EST, DATVM TRIANGVLVM, SVB *ratione data, non mutata illius specie, proportionaliter augere, uel minuere. Sit igitur rursum datum triangulum a b c: data uerò ratio, quæ d e ad e f. Reuocetur in primis ipsum a b c triangulum, in quadratum æquale, per ultimam secundi elementorum, sitque illud g h k: & producatur latus g h in directum & continuum, ad partes quidem h uersus l. Tribus deinde lineis datis d e, e f, g b, quarta proportionalis assumatur h l, per 12. sexti elementorum, sicut uidelicet d e ad e f, sic g h ad h l: & compleatur h k l parallelogrammum. Se habebit igitur quadratum g h k ad ipsum h k l parallelogrammum, ut basis g h ad basin h l, per primam sexti elementorum: & proinde ut d e ad e f, per undecimam quinti eorundem elementorum. Dato postmodum triangulo a b c simile, ipsi autem h k l parallelogrammo æquale triangulum constituatur m n o, per 25 eiusdem sexti elementorum. Et quoniam triangulum a b c, ipsi quadrato g h k est æquale, & triangulum m n o æquale parallelogrãmo h k l: triangulum propterea a b c, ad triangulum m n o eandem rationem habebit, quam g h k quadratum ad ipsum h k l parallelogrammũ, hoc est, quam d e ad e f: æquales enim magnitudines, ad æquales eandẽ habent rationẽ, per 7 quinti elementorum. Dato itaque triãgulo a b c, simile similitérque positum triangulum m n o descriptum est, sub data quidem ratione, quæ d e ad e f: quod oportuit fecisse.*



RERVM MATHEMATICARVM, HACTENVS DESIDERATARVM, LIBER QVARTVS.

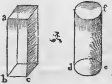
PROPOSITIO I.

Omnem columnam, atque pyramidem lateratam, in rotundam eidem lateratæ æqualem: atque è diuerso, in primis transmutare.

1 ¶VT INVENTAE TANDEM CIRCVLI *quadratura, duarum quoque rectarum inter duas datas inæquales lineas rectas continuè proportionalium, utilitatis prosequamur amplitudinem: de cubo, & sphera, cæterisque solidis, consequenter differendum esse uidetur: & simul ostendendum, qualiter eadem solida transmutentur adinuicem, & sub quauis ratione data proportionaliter augeantur, uel diminuantur.* ¶ *Ab ipsarum itaque lateratarum columnarum, & pyramidum, in columnas, seu pyramides rotundas permutatione, atque è diuerso, exordiendum esse censuimus. Lateratas igitur appellamus columnas, atque pyramides, quæ rectilineas habent bases: quarum tanta uidetur esse diuersitas, quanta & ipsarum figurarum rectilinearum differentia. Aliæ namque triangulares sunt, aliæ quadrangulares, aliæ uerò multangulæ: quæ ueluti numeri, in infinitum progrediuntur. Sed de columnis, atque pyramidibus lateratis, quæstio potissimum esse uidetur, quarum bases sunt regulares, hoc est, æquiangulæ & æquilateræ. Rotundæ porrò tam columnæ, quàm pyramides uocitantur, quarum bases circulares existunt: quæ sola quantitate (cùm omnes circuli similes sint adinuicem) inter sese differre uidentur. Euclides autem in elementis geometricis, lateratas columnas prismata indifferenter appellat: & rotundam columnam, cylindrum atque ipsam pyramidem rotundam, conum specialiter nominare solitus est, sub ipsius pyramidis diffinitione, lateratas solummodò pyramides comprehendens. Quemadmodum ex diffinitionibus undecimi elementorum, colligere haud difficile est.*

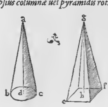
¶Prima pars, de columnæ atque pyramidis lateratæ in rotundam permutatione.

¶CVM IGITVR COLVMNAM ALIQVAM, 2
uel pyramidem lateratam, in rotundam eidem lateratę æqualem transmutare fuerit operæpretium: uertenda erit basis laterata in circulum, eidem basi æqualem, per quartam propositionem antecedentis libri tertij, & super eodem circulo, columna, uel pyramis ad eandem altitudinem erigenda. Nam ea erit rotunda, & ipsi lateratæ columnæ uel pyramidi æqualis. ¶ *Vt si quadrangularem columnam a b c, in rotundam libuerit uertere columnam, hoc est, ipsi lateratæ dare rotundã æqualem, quæ eandem obseruet altitudinem: conuersa basi quadrilatera b c, in circularem d e, excitetur columna rotunda d e f, ad altitudinem quidẽ e f quæ ipsi a b sit æqualis. Nam præfata columna d e f, eidem lateratæ a b c erit æqualis.*



¶Secunda pars, de rotundæ tam columnæ quàm pyramidis in lateratam reductione.

¶SI IVVET AVTEM ROTVNDAM CO- 3
lumnam, quæ cylindrus dicitur, aut rotundam pyramidem, quæ conus uocitatur, in lateratam eidem rotundæ æqualem, uersa uice reducere: conuerso procedendum erit ordine. Vertenda etenim erit basis circularis ipsius columnæ uel pyramidis rotundæ, in liberam quamuis rectilineam figuram, eidem circulari æqualem, per quintam propositionem antecedentis libri tertij: & super ipsa figura rectilinea, construenda columna, uel pyramis laterata, ad ipsius rotũdæ columnæ uel pyramidis altitudinem. Nam eadem laterata columna, uel pyramis, ipsi rotũdæ coæquabitur.



bitur. ¶ *Vt si uertenda fuerit (uerbi gratia) rotunda pyramis a b c, in quadrilateram: reuocandus erit in primis circulus b c, in quadratum e f, & super ipso quadrato suscitanda pyramis e f g, sub quatuor isoscelibus inuicem æqualibus comprehensa, ad altitudinẽ quidem g h, quæ ipsi a d sit æqualis. Quoniam ipsa pyramis quadrilatera e f g, æquabitur ipsi rotundæ a b c.*

¶ Supradictorum ratio mathematica.

4 ¶ *Quòd autem hæc ita se habeant, sit manifestum. In primis enim quod columnæ in basibus æqualibus, & sub eadem altitudine constitutæ, sint æquales adinuicem, nulli dubium esse uidetur: cùm ex ductu æqualium planorum, in ęquales altitudines, siue rectas procreentur. Nam sub ęqualibus planis, per ęquales altitudines ęqualiter multiplicatis, ęqualia procreantur solida.* ¶ *De pyramidibus autem, certum est illas efficere tertiam partem suarum columnarum, eandem basin & altitudinem cum ipsis pyramidibus habentium: lateratę quidem, per corollarium septimę, rotundę uerò, per decimam duodecimi elementorum. Eiusce modi autem columnę, ęquales sunt adinuicem, uti nunc ostensum est: & quę ęqualium sunt dimidium, uel tertiũ, aut quouis modo ęquè minora, ęqualia sunt adinuicem. Fit igitur, ut pyramides, ęquales bases, & altitudines habentes, sint inuicem ęquales.*

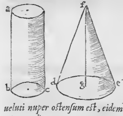
PROPOSITIO II.

Datam quamuis rotundam, aut lateratam columnam, in rotundam, aut lateratam pyramidem, eidem columnæ æqualem, & sub eadem altitudine comprehensam reducere: & è conuerso.

1 ¶ PRAEOSTENSO QVA RATIONE OMNIS *columna, atque pyramis laterata, in columnam, atque pyramidem rotundam transmutetur, & è diuerso: hic locus expostulare uidetur, ut mutuam ipsarum columnarum, atque pyramidum conuersionem, pendenter edoceamus. Et in primis qualiter oblata columna, tam rotunda, quã etiam laterata, in pyramidem ęqualem, & sub eadem altitudine comprehensam reuocetur: idem consequenter facturus, de datę cuiuscunque pyramidis, in columnam ęqualem conuersione.*

¶Prima pars, de columnæ in pyramidem æqualem, & eiuſdem altitudinis conuerſione.

¶CVM IGITVR OMNIS PYRAMIS, SIT 2 *tertia pars columnæ eandem baſim & altitudinem habentis cum ipſa pyramide, ueluti proxima traditum eſt propoſitione: ſi illius columnæ, cui expedit æqualem & eiuſdem altitudinis dare pyramidem, baſis triplетur, hoc eſt, ſub ratione tripla augeatur, per ſextam, uel ſeptimã propoſitionem antecedentis libri tertij, & ſuper eadem baſi triplicata, ad altitudinem ipſius oblatæ columnæ, pyramis erigatur: ea erit tripla illius pyramidis, quæ eandem baſin, & altitudinem habet cum data columna. Sub eodem enim faſtigio ſubſiſtentes pyramides, adinuicem ſe habent ſicut baſes, per quintam, ſextam, & undecimam duodecimi elementorum. Quæ autem eiuſdem triplicia ſunt, ea ſunt æqualia adinuicem. Data igitur columna, & in hunc modum conſtructa pyramis, eiuſdem pyramidis erunt triplices: & proinde inuicem æquales.*
¶ *Vt ſi (uerbi gratia) data fuerit columna rotunda a b c, quam oportεat in rotundam ſimiliter, & eiuſdem altitudinis mutare pyramidem, eidem columnæ datæ æqualem: ipſius columnæ baſi circulari b c, triplo maior deſcribatur, quæ ſit d e, per ſeptimam antecedentis libri tertij propoſitionem. Et ſuper eodem circulo d e, ad altitudinem f g, æqualem ipſi a b, pyramidis fabricetur d f e: hæc enim, ueluti nuper oſtenſum eſt, eidem oblatæ columnæ a b c, de neceſsitate erit æqualis.*



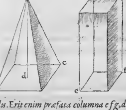
¶Secunda pars, de pyramide in columnam æqualem, eiuſdémque altitudinis reuocanda.

¶QVOD SI VERSA VICE DATA PYRAMIS, *in columnam æqualem, ſimilem baſin, eandémque altitudinem habentem, tranſmutanda proponatur: minuenda erit baſis ipſius datæ pyramidis, ſub præfata ratione tripla, per ſuperius allegatam ſextam,*

uel

uel septimam propositionem antecedentis libri tertij: & super eadem basi subtripla, erigenda columna, ad ipsius datæ pyramidis altitudinem. Vtraque enim & data pyramis, & in hunc modum constructa columna, tripla rursum erit illius pyramidis, quæ eandem basin & altitudinem cum ipsa columna: & proinde altera alteri æqualis.

¶*Vtpote, si datam pyramidem quadrilateram a b c, cuius altitudo sit a d, in columnam itidem quadrilateram, & ipsi pyramidi æqualem, uertere fuerit operepretium: accipiendum erit quadratum subtriplum ipsius basis, siue quadrati b c, per sextā propositionem ipsius antecedētis libri tertij, utpote e f: & super eodem quadrato e f, erigenda columna quadrilatera e f g, cuius altitudo f g, ipsi altitudini a d sit æqualis. Erit enim præfata columna e f g, datæ pyramidi a b c, ueluti supradictum est æqualis.*



¶Notandum.

4 ¶*Et quoniam omnis columna, similiter & pyramis laterata, in rotundam eidem lateratæ æqualem conuertitur, & è conuerso per primam huius propositionem: fit propterea, ut omnis columna data in pyramidem, uel pyramis quælibet in columnam, aut rotundam, aut lateratam indifferenter transmutetur.*

¶Corollarium, de uertenda columna, seu pyramide, in solidum rectangulum, cuius basis sit quadrata.

5 ¶OMNIS ERGO COLVMNA, SIMILITER *& pyramis, in solidum rectangulum, sub æquidistantibus planis, & in quadrata basi comprehensum, eidem columnæ uel pyramidi æquale, uel facilè reducetur. Per hanc etenim secundam propositionem, omnis pyramis uertitur in columnam æqualem: & è conuerso. Et per antecedentem primam propositionem, omnis columna, similiter & pyramis*

rotunda, in lateratam reuocatur, & è diuerso. Et proinde in rectangulum solidum, super quadrata basi constitutum tandem reducetur: transmutando uidelicet rectilineam, aut circularem basin ipsius datæ columnæ, in quadratam, per ea, quæ tum secundo libro, tum quarta, & quinta propositione libri tertij tradita sunt. Hîc inter columnas, annumeramus etiam omnia rectangula solida, sub æquidistantibus planis comprehensa, quæ parallelepipeda uocitantur.

PROPOSITIO III.

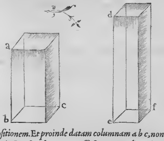
Omnem columnam, similiter & pyramidem, sub data quauis altitudine, in longiorem, aut breuiorem transmutare, seruata quantitate magnitudinis.

¶SVB EA ITAQVE RATIONE, QVAM *habet altitudo proposita, ad ipsius datæ columnæ, uel pyramidis altitudinem, basis eiusdem columnæ, uel pyramidis proportionaliter augeatur, uel minuatur, per sextam, uel septimam propositionem antecedentis libri tertij: & super huiuscemodi basi, ad ipsam altitudinem propositam, columna, seu pyramis erigatur:* Nam ea erit *æqualis ipsi datæ columnæ, uel pyramidi.* ¶ *Bases etenim (ut singula mathematicè dilucidemus) suis altitudinibus erunt reciprocè proportionales: & tam columnæ, quàm pyramides rotundæ, quarum bases suis altitudinibus sunt reciprocè proportionales, æquales sunt adinuicem, per 15 duodecimi elementorum. Ipsis porrò columnis, atque pyramidibus rotundis, lateratæ describuntur æquales, & sub eadem altitudine comprehensæ, per primam huius propositionem* Et *æquales magnitudines ad easdem, uel æquales, eandem habent rationem, per septimam quinti elementorum.* Idem itaque *uidetur esse iudicium de lateratis, quod de rotundis tam columnis, quàm etiam pyramidibus.* 1

¶Primum exemplum, de columnis.

¶ *Sit in exemplum data columna laterata, utpote quadrilatera, quam oporteat in longiorem reuocare columnam, ad altitudinem uidelicet d e, quæ maior est a b ipsius datæ columnæ altitudine. Sub ea itaque ratione,* 2

ne, quam habet altitudo d e ad ipsam altitudinem a b, proportionetur basis b c ad basin e f, per sextam antecedentis libri tertij propositionem: sicut quidem d e ad ipsam a b, sic basis b c ad basin e f. Et super ipsa basi e f, pro data altitudine d e, columna suscitetur d e f. Erit enim ipsa d e f, æqualis datæ columnæ a b c, per ea quæ proximè fuere demonstrata. ¶Poterit & eadē columna d e f, in rotundam uel facilè transmutari, per primam huius propositionem.



Et proinde datam columnam a b c, non solùm altitudinē, sed & ipsam simul mutare posse figuram, relinquitur manifestum: seruata nihilominus propriæ quantitatis magnitudine.

¶Secundum exemplum, de pyramidibus.

3 *¶Esto rursum data pyramis rotunda g h k, cuius altitudo g l, in breuiorem coartanda pyramidem, ipsi g h k nihilominus æqualem: sub data quidem altitudine m n, quæ ipsa g l utcunque minor existat. Basis itaque circularis h k, sub ea ratione in primis adaugeatur, quam habet altitudo g l, ad datam altitudinem m n, per septimam propositionem antecedentis libri tertij: sitque (uerbi gratia) o p, sicut quidem altitudo g l ad ipsam m n, sic basis o p ad basin h k. Et super eadem basi o p, pro data altitudine m n, pyramis erigatur m o p. Erūt itaque rursum ipsarum pyramidū bases, suis altitudinibus reciprocè proportionales: & pro-*



u

inde pyramides ipsæ æquales adinuicem, per ipsam nuper allegatam 15 duodecimi elementorum. ¶ *Poterit & ipsa pyramus rotunda m o p, in lateratam mutari pyramidem, per ipsam antecedentem primam propositionem. Hinc datæ pyramidis rotundæ g h k, tum altitudo, tum figura ipsa simul uariari poterit, ipsius quantitatis permanente magnitudine.*

PROPOSITIO IIII.

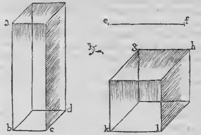
Datum solidum rectangulum, sub æquidistantibus planis, & dimensionibus inæqualibus comprehensum, in cubum eidem solido æquale conuertere.

¶HVIVSCEMODI RECTANGVLA SOLIDA, 1
sub inuicem æquidistantibus planis comprehensa, parallelepipeda uocitantur, hoc est rectangulis planis inuicem parallelis terminata. Cubum autem, est unum de quinque corporibus regularibus, hoc est, rectangulum solidum, sex quadratis superficiebus, instar taxilli figuratum. Omne autem solidum rectangulum, simul est parallelepipedum, at non è diuerso: multa enim sunt parallelepipeda, amblygonia nuncupata, partim rhombis, aut rhomboidibus, partim uerò rectangulis terminata. ¶*Considerandum igitur (ut ad propositionis executionem deueniamus) an dati solidi rectanguli, in cubum æquale reducendi, basis fuerit quadrata, nec ne: quoniam utcunque dissidens subsequetur operandi ratio.*

¶Prima pars, de solido rectangulo, cuius basis est quadrata:

¶ *Si datum itaque rectangulum solidum, basin habuerit quadratam:* 2
inueniantur inter ipsius solidi altitudinem, atque latus eiusdem quadratæ basis, duæ mediæ lineæ rectæ sub eadem ratione continuè proportionales, per aliquam antecedentis primi libri propositionem. Ex ea tandem media proportionali, quæ eidem basi uicinior extiterit, cubum describatur, sub æqualibus dimensionibus comprehensum: illud enim dato solido rectangulo erit æquale. ¶ *Vt si (lucidioris intelligentiæ gratia) datum fuerit solidum rectangulum a b c d, cuius altitudo sit a b, basis uerò quadratum b c d, & ipsius quadrati latus b c uel c d: & ipsum rectangulum solidum a b c d, in cubum æquale transmutare sit operæpretium.*

tium. Inter ipsam igitur altitudinem a b, & latus quadratæ basis c d, duæ mediæ lineæ rectæ sub eadem ratione continuè proportionales inueniãtur, quæ sint e f, & g h: sicut quidem a b ad e f, sic eadem e f ad g h,



atque ipsa g h ad præfatum latus c d. Ex ipsa demum g h, media uidelicet proportionali quæ eidem lateri c d uicinior est, hoc est, proximè maior, cubum describatur g h k l. Ipsum nanque cubum g h k l, æquum erit dato solido rectangulo a b c d: quemadmodum infra mathematicè deducetur.

¶Secunda pars, de solido rectangulo, basin minimè quadratam habente.

3 ¶*Vbi autem datum solidum rectangulum, basin habuerit minimè quadratam, sed altera parte longiorem: inueniendum erit tunc latus quadrati eidem basi æqualis, per ultimam secundi elementorum. Deinde, inter altitudinem ipsius rectanguli solidi, & idem latus quadrati, duæ mediæ continuè proportionales erunt (ueluti suprà diximus) colligendæ. Cubum enim solidum, quod ex ea mediarum proportionalium describetur, quæ eidem lateri uicinior extiterit, ipsi dato rectangulo solido erit æquale: nempe ipsi rectangulo solido æquale, quod sub eadem altitudine, & super eadem quadrata basi (quæ eiusdem solidi basi coæquatur) constituitur. Solida nanque parallelepipeda, super æqualibus basibus, & sub eadem altitudine consistentia, sunt adinuicem æqualia, per 31 undecimi elementorum.*

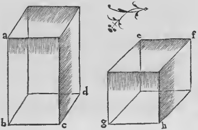
¶Supradictæ conuersionis demonstratio.

4 ¶ *Quòd autem huiuscemodi solidum rectangulum, sub inæqualibus*

dimenſionibus comprehenſum, in cubum eidem ſolido æquale ſupraſcripto modo reducatur: ex quarto corollario nonæ propoſitionis, antecedentis libri primi, fit manifeſtum. Patuit enim, datis quatuor numeris continuè proportionalibus, ſolidum numerum rectangulum, cuius baſis eſt quadratus unius extremorum numerorum, altitudo uerò reliquus extremus numerus: æqualem eſſe numero cubo, qui ex medio numero proportionali eidem quadrato, numero, aut illius radici uiciniori deſcribitur. Quæ autem ipſis accidunt numeris, ea oportet magnitudinibus eſſe communia: quanquam non omnino è conuerſo. Cùm igitur præfatum ſolidum, conſtet ex quadrato ipſius quartæ lineæ proportionalis, in primam lineam, hoc eſt, in altitudinem eiuſdem ſolidi multiplicato: illius cubica radix, erit tertia proportionalis, & cubum ex eadem tertia proportionali deſcriptum, ipſi dato ſolido rectangulo pendenter æquale. Idq́ue uelim intelligas, ſiue dati ſolidi altitudo, maior aut minor fuerit ipſius quadratæ baſis, uel in quadratum reductæ latere.

¶Incidens notandum, de ſolido cuius dimenſiones ſunt proportionales.

¶Quòd ſi forſitan acciderit, ut tres ipſius dati ſolidi rectanguli dimenſiones, continuè ſint proportionales: tunc cubum ex ipſa media proportionali deſcriptum, ipſi dato ſolido rectangulo, ſub eiſdem tribus dimenſionibus continuè proportionalibus comprehenſo erit æquale, per 36 undecimi elementorum. Vtpote, ſi datum fuerit ſolidum rectangulum a b c d, cuius altitudo a b ad illius longitudinem b c eandem rationem habeat, 5



beat, quam eadem b c ad ipsam latitudinem c d: & ex e f ipsi b c æquali, cubum describatur e f g h: illud erit æquale dato solido rectangulo a b c d, sub eisdem tribus dimensionibus a b, b c, c d continuè proportionalibus comprehenso.

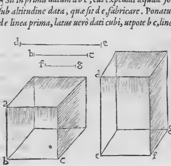
¶Corollarium, de reductione columnæ, atque pyramidis, in cubum æquale.

6 ¶OMNIS ERGO COLVMNA, SIMILITER *& pyramis, in cubum eidem columnæ uel pyramidi æquale, uel facilè transmutabitur. Nam per corollarium antecedentis secundæ propositionis, tam columna, quam etiam pyramis, in solidum rectangulum, sub æquidistantibus planis, & in quadrata basi comprehensum, eidem columnæ, uel pyramidi æquale transformatur. Et ipsum rectangulum solidum super quadrata basi consistens, per ipsam quartam propositionem (uti quamprimum ostensum est) uel facilè reuocatur. Corollarium igitur, ex omni parte uerum.*

PROPOSITIO V.

Datum cubum, in datæ altitudinis solidum rectangulum: aut in parallelepipedum, super data basi comprehensum reducere.

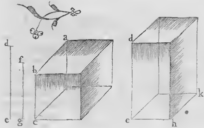
1 ¶*Sit in primis datum a b c, cui expediat æquale solidum rectangulum, sub altitudine data, quæ sit d e, fabricare. Ponatur igitur ipsa altitudo d e linea prima, latus uerò dati cubi, utpote b c, linea secunda: & inueniatur tertia proportionalis, quæ sit f g, per undecimam sexti elementorum. Fiat deinde planũ rectangulum e f g, sub e f (quæ ipsi b c sit æqualis, & ipsa f g) comprehensum. Tandem super ipso plano e f g, pro da-*



ta altitudine d e, solidum erigatur d e f g, sub eisdem tribus lineis inuicem proportionalibus contentum. Erit igitur solidum rectangulum d e f g, æquale ipsi dato cubo a b c, quod ex media proportionali descriptum est, per 36 undecimi elementorum.

¶ Vt idem cubum, in datæ altitudinis solidum, sed in quadrata basi consistens reuocetur.

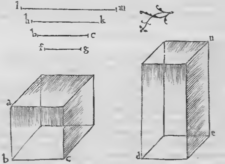
¶ Quòd si libuerit ipsum datum cubum, in propositæ rursum altitudinis solidum rectangulum, sed cuius basis sit quadrata, immediatè transmutare: inuenienda erit media proportionalis, inter datam altitudinem, & ipsius cubi latus: deinde quarta proportionalis post latus eiusdem cubi, per 12, & 13 sexti elementorum. Tandem faciendum erit quadratum ex ipsa linea quarta: & super ipso quadrato, erigendum solidum rectangulum, ad propositam altitudinem siue lineam primam proportionalem. Illud enim solidum, æquum erit ipsi dato cubo, per contrariam antecedentis quartæ propositionis operationem. Datis enim quatuor lineis rectis continuè proportionalibus, præostensum est, rectangulum solidum, cuius basis est quadratum unius extremarum linearum, altitudo uerò reliqua: illud rectangulum æquum esse cubo, quod ex ea mediarum proportionalium describitur, quæ lateri ipsius quadratæ basis uicinior existit. ¶ Vt si rursum fuerit datum cubum a b c, & ipsa altitudo proposita d e: sumenda erit media proportionalis inter d e atque b c, quæ sit f g: deinde quarta itidem proportionalis h k. Erũt itaque quatuor lineæ rectæ, sub eadem ratione continuè proportionales: sicut uidelicet d e ad f g, sic eadem f g ad latus b c, atque idem latus b c ad rectã h k. Fiat igitur quadratum, ex ipsa h k: & demum rectangulum solidũ d e h k, ad propositã altitudinẽ d e. Ipsũ nanque rectãgulum solidum d e h k, æquũ erit ipsi dato cubo 2



cubo a b c, per ipsius antecedẽtis quartæ propositionis demonstrationem.

¶Secunda pars, ut eidem cubo æquale solidum parallelepipedum, super oblata basi rectilinea fabricetur.

3 *¶Sed esto data basis rectilinea d e, super qua receptum sit erigere solidum parallelepipedum, eidem oblato cubo ęquale. Assumatur ergo latus quadrati, eidem basi rectilineæ (si non fuerit quadrata) æqualis, per 45 primi, & ultimam secundi elementorum: sitque illud f g. Idem porrò latus f g statuatur linea prima, latus uerò cubi, utpote b c, linea secunda: & inueniatur tertia proportionalis h k, per ipsam undecimam sexti elementorum. Fiat deinde, ut f g ad h k, sic latus c d ad rectam l m, per duodecimam eiusdem sexti elementorum. Et quoniam tres lineæ rectæ f g, c d, h k, sunt continuè proportionales: quadratum igitur ipsius f g, ad quadratum ipsius c d eandem habet rationem, quam ipsa f g prima linea ad tertiam h k, per corollarium decimænonæ sexti elementorum: & proinde quam b c ad ipsam l m. Ipsi autem quadrato quod ex f g, æquum est rectilineum d e, per cõstructionis hypothesin: & æquales magnitudines, ad eandem magnitudinem eandem habent rationem, per septimam quinti eorundem elementorum. Sicut igitur rectilineum d e ad quadratum ipsius b c, sic eadem b c ad rectam l m. Si describatur itaque super eodem plano rectilineo d e, ad altitudinem e n, quæ ipsi l m sit æqualis, solidum parallelepipedũ d e n: illud erit æquale dato cubo a b c,*



per 34 undecimi elementorum. Habent enim bases suas altitudinibus reciprocè proportionales: quadratum enim ipsius b c est basis dati cubi, & ipsa b c eiusdem cubi sublimitas, nempe æqualis ipsi a b eiusdem cubi lateri.

¶ Idem fieri posse de quocunque solido rectangulo, non cubo.

¶ *Idem quoque fieri poterit, de dato quouis rectangulo solido non existente cubo: accipiẽdo uidelicet illius altitudinem, loco altitudinis ipsius* 4
dati cubi: & latus quadrati propriæ basi æqualis, loco lateris eiusdem cubi: atque sicut f g ad h k, sic faciendo ipsam altitudinem ad rectam l m. Erit enim rursum eadem l m, altitudo solidi parallelepipedi super oblato plano descripti, & ipsi dato solido rectangulo æqualis. Assumendæ sunt igitur duæ lineæ, loco lateris ipsius cubi, utpote, in locum ipsius lateris b c, quod est latus quadratæ basis, & eiusdem cubi supplebat altitudinem.

¶ Corollarium bipartitum, notatu dignum.

¶ *Datum ergo cubum, pro datæ altitudinis, aut ipsius planæ basis diuersitate, in multiformia reuocabitur solida, aut rotundam, aut lateratam basin habentia: quæ generali nomenclatura, columnæ uocitantur.* 5
Omnis siquidem rectilinea basis, in circulum æqualem, per quartam propositionem antecedentis libri tertij reuocatur. ¶ *Mutabitur tandem ipsum oblatum cubum, in rotundam, aut lateratam pyramidem: cùm per secundam huius propositionem, omnis columna in datam pyramidem, hoc est, rotundam aut lateratam basin habentem, uel facilè transmutetur.*

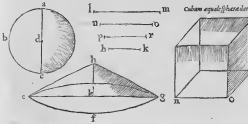
PROPOSITIO VI.

SPhæræ datæ, cubum æquale: datóue cubo, æqualem sphæram consequenter fabricare.

¶ *Ex uigesimasecunda propositione, libri primi Archimedis de sphæra & cylindro, certum habetur: sphæram esse quadruplam coni, seu rotũ-* 1
dæ pyramidis, cuius basis fuerit maximus ipsius sphæræ circulus, altitudo uerò eiusdem maximi circuli, aut sphæræ semidiameter. Conus igitur, cuius basis fuerit quadruplus circulus ipsius maximi circuli, altitudo uerò idem semidiameter oblatæ sphæræ: eidem sphæræ æqualis erit. Idem nanque conus, quemadmodum & ipsa sphæra, quadruplus erit ipsius coni, cuius basis est circulus sphæræ maximus, altitudo autem

eiusdem

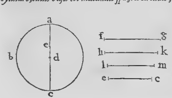
eiusdem sphęræ semidiameter. Sub eodem nanque fastigio existentes coni, adinuicem se habent sicut bases, per undecimam duodecimi elementorum. Descriptus autem ex ipsius sphęrę diametro circulus, quadruplus est maximi eiusdem sphæræ circuli: atque superficiei sphæricæ æqualis, per 31 præallegati libri ipsius Archimedis. *Conus igitur, super huiuscemodi circulo ex diametro sphæræ descripto, ad præfatam altitudinem semidiametri sphęræ constitutus: eidem sphęræ de necessitate coęquatur. Huic autem cono, datur æquale cubum, per antecedentis quartæ propositionis corollarium: & proinde ipsi sphæræ datę cubum æquale describitur.* ¶ *Sit, in supradictorum exemplum, data sphæra, in qua maximus circulus a b c, cuius centrum d, dimetiens uerò a c: & describatur in primis ex ipso dimetiente circulus e f g, cuius centrum k, dimetiens autem e g, ipsius a c duplus. Super eodem postmodum circulo e f g, conus erigatur h e f g, ad altitudinem quidem h k, quæ ipsi d a semidiametro sit æqualis. Hic autem conus h e f g, in cubum æquale, iuxta ipsius antecedentis quartæ propositionis traditionem, & eius corollarium, in hunc qui sequitur modum reducatur. Quadretur in primis idem circulus e f g, per aliquam propositionum antecedentis secundi libri: & ipsius quadrati assumatur pars tertia (quod factu uidetur admodum facile) quę reducatur in quadratum, per ultimam secūdi elementorum. Solidum enim rectangulum, super eodem quadrato, & sub altitudine* h k *comprehensum, ipsi cono h e f g, & proinde ipsi sphęrę datę erit ęquale. Inter latus consequenter huiusce quadrati, quod sit l m, & altitudinem* h k, *duę medię lineę rectę continuè proportionales inuenian-*



tur, per aliquam propositionum antecedentis libri primi, quæ sint n o & p r: sicut quidem l m ad n o, sic eadem n o ad p r, & ipsa p r ad altitudinem h k. Cubum enim descriptum ex ipsa n o, ipsi sphæræ datæ coæquabitur.

¶Altera sphæræ cubicatio.

¶IDEM QVOQVE LICEBIT ALITER AB- 2
soluere. Nam per eandem 32 *propositionem, libri primi de sphæra & cylindro ipsius* Archimedis: *cylindrus, cuius basis est maximus sphæræ circulus, altitudo uerò eiusdem maximi circuli aut sphæræ diameter, ad ipsam sphæram rationem habet sesqualteram.* Et proinde fit, *ut cylindrus, cuius basis est idem maximus sphæræ circulus, altitudo uerò duo ipsius diametri tertia, eidem sphæræ sit æqualis:* Continebit enim, *quemadmodum & ipsa sphæra, duo tertia præfati cylindri, cuius altitudo est totus sphæræ diameter.* Quoniam in *basibus æqualibus existentes cylindri, adinuicem sese habent sicut illorum altitudines, per* 14 *duodecimi elementorum.* Hic *demum cylindrus, seu columna rotunda, ipsi sphæræ æqualis: facilè uertetur in cubum, per ipsius antecedentis quartę propositionis corollarium: quod quidem cubum eidem sphærę coæquabitur.* Sit *enim rursum data sphęra, cuius maximus circulus a b c, & centrum d, dimetiens autem a c.* Ex *ipso itaque dimetiente a c, abscindatur pars tertia, per nonam sexti elementorum, quæ sit a e:* Re*sidua igitur e c, continebit reliqua duo tertia.* Quadretur *postmodum circulus maximus a b c ipsius sphęræ datæ, per aliquam propositionum antecedentis libri secundi: sitque latus ipsius quadrati f g.* Rectangulum *enim solidum, cuius basis erit quadratum ipsius f g, altitudo uerò e c, æquum erit cylindro, cuius basis est maximus sphęræ circulus, altitudo uerò eadem, utpote e c.* Inter *ipsas demum f g & e c, duę medię proportionales inueniantur, per aliquam libri primi propositionem, quę sint h k & l m: sicut quidem f g ad h k, sic*



h k, sic eadem h k ad l m, atque ipsa l m ad altitudinem c e. Cubum enim quod ex ipsa h k describetur, ipsi datæ sphæræ erit æquale: Et proinde eadem h k, ipsi n o prioris demonstrationis coæquabitur.

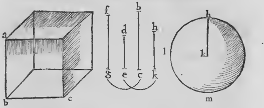
¶Illatio notanda.

3 ¶*Non est igitur cubum, ex latere quadrati descriptum, quod maximo ipsius sphæræ æquatur circulo, eidem sphæræ æquale: ut plerique tradiderunt, à quorum nominibus nostro more abstinemus. Cùm enim f g sit latus quadrati eidem maximo circulo æqualis, & ipsa f g maior h k, quæ est latus cubi datæ sphæræ æqualis, nempe æqualis cylindro qui eidem sphæræ coæquatur, per ipsius antecedentis quartæ propositionis demonstrationem: Euidens relinquitur, cubum ex ipsa f g descriptum, eadem sphæra sensibiliter esse maius.*

¶Secunda pars, ut dato cubo æqualis sphæra uersa uice describatur.

4 ¶DATO AVTEM, SPHAERAM AEQVALEM *in hunc licebit describere modum. Esto datum cubum a b c, cui expediat æqualem sphæram designare. Proponatur igitur oblata quæuis sphæra, cuius semidiameter sit d e: & inueniatur latus cubi eidem sphæræ æqualis, per alterutram antecedentis primæ partis demonstrationem, sitque illud f g. Et sicut f g ad semidiametrum d e, sic fiat latus dati cubi (utpote b c) ad rectam h k, per 12 sexti elementorum. Cùm igitur quatuor lineæ rectæ f g, d e, b c, h k, sint inuicem proportionales: permutatim quoque proportionales erunt, per sedecimam sexti elementorum, sicut quidem f g ad b c, sic d e ad ipsam h k. Si autem quatuor lineæ rectæ, proportionales fuerint: & quæ ex ipsis solida parallelepipeda similia, similiterque descripta, proportionalia erunt: & è conuersa, per 37 undecimi eorundem elementorum. Cubum igitur quod f g describitur, ad cubum quod ex b c eandem habet rationem, quam sphæra cuius semidiameter est d e, ad sphæram cuius semidiameter est h k. Vt enim cubum simile est cubo, sic & sphæra sphæræ similis esse uidetur: utpote, quæ omnium solidorum regularissima est, & omnifariam parallelepipeda: nempe cuius superficies, ex infinitis inuicem æquidistantibus & confusis su-*

perficiebus cõstare uidetur. Præterea non oportet ipsa quatuor solida, similia esse adinuicem: sed ea tantummodo, quorum proxima uel immediata fit comparatio. Cùm sit igitur ut cubum quod ex f g ad cubum quod ex b c describitur, sic sphæra, cuius semidiameter est d e, ad sphærã cuius semidiameter est h k: erit quoque permutatim, per eandem sedecimam libri sexti elementorum, ut cubum quod ex f g, ad sphæram cuius semidiameter est d e, sic datum cubum quod ex b c ad sphæram cuius semidiameter est h k. Sed cubum quod ex f g describitur, æquatur sphæræ cuius semidiameter est d e, per constructionis hypothesin: datum igitur cubum quod fit ex b c, æquum erit sphæræ cuius semidiameter est h k. Describatur igitur ex h k circulus, & ad ipsius circuli quantitatem, sphæra h l m: ea enim æqualis erit ipsi dato cubo a b c. Datæ igitur sphæræ, cubum æquale describitur & è conuerso. Quod faciendum receperamus.



¶Corollarium 1. De reductione sphæræ in columnam, aut pyramidem æqualem: & è conuerso.

¶DATAE IGITVR SPHAERAE, LATERA- *ta seu rotunda columna, uel pyramis describetur æqualis: & è conuerso, cuilibet oblatæ columnæ, seu pyramidi, rectilineam uel circularem basin habenti, æqualis sphæra designabitur. Prima pars corollarij fit manifesta. Sphæra enim, uertitur in cubum æquale, per primam partem huius sextæ propositionis: & omne cubum, in datæ altitudinis solidum rectangulum, aut in parallelepipedum super data basi consistens*

consistens reuocatur, per quintam huius propositionem. Idem autem rectangulum solidum, aut parallelepipedum, in columnam cuius basis est quadrata reducitur. Hanc porrò columnam, facile est transmutare in rotundam, per primam huius propositionem: & columnam demum rotundam, in lateratam aut rotundam pyramidem, per secundam huius propositionem. ¶ *Secunda uerò pars corollarij, non minus euidens est. Omnis etenim columna, similiter & pyramis, reducitur in cubum, eidem columnæ uel pyramidi æquale, per corollarium antecedentis quartæ propositionis. Cuilibet autem cubo, æqualis sphæra describitur, per secundam huius sextæ propositionis. Data igitur columna, uel pyramis, atque huiuscemodi sphæra, eidem cubo erunt æqualia: & proinde æqualia adinuicem. Vtraque propterea corollarij pars, uera.*

¶ Corollarium 2. Quòd unumquodque cæterorum regularium corporum, in cubum, aut sphæram reuocatur.

6 ¶ MANIFESTVM EST PRAETEREA, VNVM- *quodque cæterorum regularium corporum, in cubum, atque demum in sphæram reduci uel facilè posse. Corpora autem regularia, hoc est, sub æquiangulis ac inuicem æqualibus planis (quorum quodlibet, basis indifferēter dicitur) cōprehensa, sunt tantūmodo quīnque. Primū corpus*
1 *regulare, quatuor basibus triangularibus terminatur: & tetrahedrum dicitur. Secundum uerò, sex quadratis clauditur basibus: & uocatur hexhadrum, siue cubum. Tertium autem, sub octo regularibus triangulis continetur: & octahedrum propterea nuncupatur. Quartum dicitur icosahedrum, uiginti basibus itidem triangularibus terminatum. Quintum denique regulare corpus, sub duodecim pentagonis basibus comprehensum: dodecahedrum uocitatur. Quæ quidem regularia corpora, tum inuicem, tum ipsi sphæræ sunt inscriptibilia. Vnumquodque igitur supradictorum quinque regularium corporum, ex tot resultat pyramidibus inuicem æqualibus, quot sunt in illo triangulares, quadratæ, uel pentagonæ bases: quarum pyramidum altitudo, est linea perpendicularis, quæ est centro cuiuslibet regularis corporis, in basin quamlibet educitur. Ex præostensis autem, atque geometricorum elementorum propositionibus fit manifestum, ipsas cuiuslibet regularis corporis*

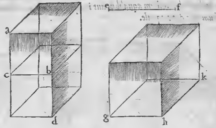
bases, in unam posse reuocari superficiem, etiam regularem. Super qua uniuersali superficie, si ad prafata perpendicularis altitudinem pyramis erigatur: ea erit æqualis omnibus ipsius dati corporis regularis pyramidibus, & eidem propterea regulari corpori æqualis. Ipsa nanque pyramis, ad unamquamque singularem pyramidem eam rationem obtinebit, quam basis ad basin. Quoties igitur basis ipsius uniuersalis pyramidis, cuiuslibet pyramidis particularis basin continebit: toties eadem uniuersalis pyramis, unamquanque singularem pyramidem, & totum propterea regulare corpus comprehendet. Omnis autem pyramis, in solidum rectangulum, per corollarium antecedentis secundæ propositionis uel facilè transmutatur: & solidum quodlibet rectangulum, in cubum æquale reducitur, per ipsam quartam propositionem. Ipsi tandem cubo, æqualis sphæra, per hanc sextam propositionem describitur. Corollariũ *igitur ex omni parte uerum.*

PROPOSITIO VII.

Cvbum cubo iungere: ex duobus ue cubis æqualibus, aut inæqualibus, unum conficere cubum ipsis datis cubis æquale.

¶IN PRIMIS IGITVR, SI CVBVM CVBO FVE- 1
rit æquale, alterum alteri directè suprapositum, efficiet rectangulum solidum altera parte longius: quod per antecedentem quartam propositionem, facilè uertetur in cubum, eidem rectangulo solido, & ipsis proinde cubis datis æquale. ¶*Vt si (uerbi gratia) datum fuerit cubum a b, cubo c d, æquali componendum: conficiatur ex ipsis duobus cubis, rectangulum solidum a c d, cuius basis erit quadrata, altitudo uerò ex utrisque datorum cuborum consurgens lateribus. Inuentis ergo duabus lineis rectis, inter a c, atque c d, continuè proportionalibus, per aliquam propositionum antecedentis libri primi, quæ sint e f, & g h, sicut quidem a c, ad e f, sic eadem e f, ad ipsam g h, atque eadem g h, ad ipsam c d: describatur ex ipsa g h, cubum g h* k. *Illud enim erit æquale præfato solido rectangulo a c d, & æquale propterea ipsis datis cubis a b, & c d.*

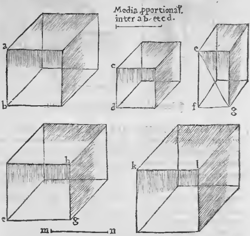
¶Secunda



¶ Secunda pars de cubis inæqualibus.

2 ¶AT SI ALTERVM DATORVM CVBORVM *utpote a b, maius fuerit reliquo c d: reuocãdum erit idem minus cubum c d, in rectangulum solidum, sub altitudine ipsius a b, & in quadrata basi comprehensum, per antecedentem quintam propositionem: inuēta media proportionali inter a b, & b c, deinde quarta itidem proportionali post ipsam b c, quæ sit f g: ex qua describatur quadratum, super quo erigatur præfatum rectangulum solidum e f g. Cõnectatur postmodum e g, linea recta: cuius quadratum æquum erit iis, quæ ex e f, & f g, per penultimam primi elementorum, & proinde quadratis quæ ex a b, & eadem f g, describuntur. Fiat igitur quadratum, ex ipsa e g: & describatur super illo rectangulum solidum e g h, ad præfatam altitudinem cubi maioris, scilicet a b. Illud enim rectangulum solidum e g h, æquum erit eidem maiori cubo a b, atque rectangulo solido e f g: & proinde datis cubis a b, & c d, pendenter æquale. Sub eadem enim altitudine existentia solida parallelepipeda, adinuicem sunt sicut bases, per trigesimam secundam undecimi elementorum. Operæpretium est tandem, inter latus e g, quadratæ basis, & altitudinem g h (quæ minor est ipso latere) duas inuenire rectas continuè proportionales, per aliquam propositionum antecedentis libri primi: quæ sint (uerbi gratia)* k l, *&* m n, *sicut quidem e g, ad* k l, *sic eadem.* k l, *ad ipsam m n, atque eadem m n, ad præfatam altitudinem g h. Cubum enim quod ex ipsa* k l, *describetur, eidem solido rectangulo e g h, & ipsis consequenter datis cubis a b, &*

cd, per quartam huius propositionem erit æquale. Habes igitur, qua uia ex duobus cubis inuicem æqualibus aut inæqualibus, unum conficiatur cubum ipsis datis æquale.



¶ Notandum.

¶ *Idem fiet consequenter de tribus, aut pluribus cubis, in unum cubum eisdem cubis æquale componendis. Nam reductis duobus primis cubis, in unum cubum ipsis duobus æquale: illud, cum sequenti cubo ordine tertio, in unum cubum (quod tribus primis erit æquale) reuocandum erit: & illud rursum, cum succedenti quarto. Et deinceps in hunc modum, pro data cuborum in unum reuocandorum multitudine.* 3

¶ Corollarium I. De duabus columnis, aut pyramidibus, in unam componendis.

¶ *Idem quoque fiet, de columnis, & pyramidibus inuicem æqualibus aut inæqualibus.* Hic *inter columnas lateratas, annumeramus omnia* 4

solida

solida rectangula minimè cubica, sub æquidistantibus planis & dimensionibus inæqualibus comprehensa. Nam eiuscemodi columnæ, atque pyramides, aut eiusdem erunt altitudinis, aut diuersæ. Si secundum acciderit, reuocentur ad eandem altitudinem, longiorem in breuiorem transmutando: aut è conuerso, seruata quantitate magnitudinis, per tertiam huius propositionem. Deinde fiat basis, quæ utriusque columnæ, uel pyramidis basin comprehendat. Duabus enim, aut pluribus rectilineis figuris, unica dari potest æqualis, atque duobus, aut pluribus circulis, unus æqualis describi circulus, per secundum corollarium septimæ propositionis antecedentis libri tertij. Circulus præterea, in rectilineam uertitur figuram: & è conuerso, per quartam, & quintam propositionem ipsius præcedentis libri tertij: ut omnia proposito compositionis tibi citemus adminicula. Super hac igitur basi, quæ datarum eiusdem altitudinis columnarum, siue pyramidum basibus est æqualis, si ad eandem altitudinem columna, uel pyramis erigatur: ea erit æqualis ipsis columnis, siue pyramidibus: quemadmodum ex prædictis, & trigesima secunda undecimi, atque sexta, & undecima duodecimi elementorum uel facilè colligitur.

¶ Notandum.

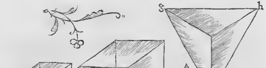
5 ¶ *Et proinde fit, ut duæ columnæ, uel pyramides, aut simul rotundæ, aut simul lateratæ, unáue existente laterata, & altera rotunda: in unam aut rotundam, aut lateratam columnam, seu pyramidem, ipsis datis æqualem, uel facilè reducatur.*

¶ Corollarium 2. De cæteris regularibus corporibus in unum componendis ipsis datis æquale.

6 ¶ *Patet insuper, qualiter ex duobus cæterorum regularium corporum à cubo, unum simile, ac eisdem æquale corpus fabricetur. Ex secundo enim corollario antecedentis sextæ propositionis fit manifestum, qualiter cætera regularia corpora, in ipsum cubum transmutentur: ex hac autem septima propositione, qua uia ipsis duobus aut pluribus cubis, unum æquale cubum describatur. Hoc autem cubum, si in simile corpus regulare cum ipsis datis reuocetur: illud præfatis, hoc est, datis à principio regularibus corporibus, de necessitate coæquabitur.*

¶ Inuentio lateris oblati corporis regularis, ipsi dato cubo æqualis.

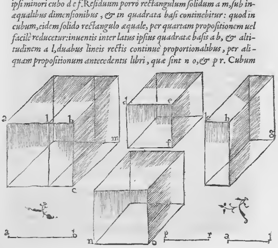
¶ *Reliquum est ergo, demonstrare qualiter inueniendum sit latus dati corporis regularis, eidem cubo æqualis. Esto itaque propositum in cæterorum exemplum, inuenire latus tetrahedri, dato cubo æqualis, cuius latus sit a b. Assumatur ergo tetrahedrum quoddam liberæ magnitudinis, cuius unum latus sit c d, & per secundum corollarium antecedentis sextæ propositionis, illud in cubum æquale transmutetur, cuius latus sit e f. Datis consequenter tribus lineis rectis, e f, a b, c d, quarta proportionalis inueniatur g h, per 12 sexti elementorum. Erit enim recta g h, latus tetrahedri ipsi dato cubo æqualis. Quoniam ipsæ quatuor lineæ rectæ, e f, a b, c d, g h, sunt per constructionem inuicem proportionales: sicut uidelicet e f, ad ipsam a b, sic c d, ad ipsam g h. Est igitur ut cubum quod ex e f, ad cubum quod ex a b, describitur: sic tetrahedrum cuius latus est c d, ad tetrahedrum cuius latus est g h, hoc est, simile solidum, ad simile similitérque descriptum, per 37 undecimi elementorum. Et permutatim erit igitur, per sedecimam quinti eorundem elemẽtorum, ut cubum quod ex e f, ad tetrahedrum cuius latus est c d: sic cubũ descriptũ ex a b, ad tetrahedrũ cuius latus est g h. Atqui primum æquatur secũdo, per constructionis hypothesin: igitur & tertium, ipsi quarto. Cubum igitur, cuius latus est a b, æquum est tetrahedro cuius latus est g h. Idem uelim intelligas de cæteris regularibus corporibus.* 7



PROPOSITIO VIII.

A Maiori cubo detracto minori, residuũ exprimere cubum: Idémque de rectangulo solido non cubo respondenter obseruare.

1 ¶ESTO, CLARIORIS INTELLIGENTIAE GRAtia, *propositum, à maiori cubo quod sit a b c, detracto minori d e f, residuum cubum exprimere. Fiat igitur in primis quadratum, uni quadratorum ipsius cubi maioris æquale: cuius latus sit g h. Et super ipso quadrato g h, dato cubo d e f, æquale solidum rectãgulum describatur g h k, per secundam partem antecedentis quartæ propositionis. Secetur postmodum ex dati cubi maioris latere a b, ipsi h k, æqualis, utpote b l, per tertiam primi elemẽtorum. Et per punctum l, diuidatur idem cubum a b c, sub plano l m. Detrahetur itaque ex ipso maiori cubo a b c, solidum rectangulum l m, ipsi rectangulo solido g h k, equale: & proinde æquale ipsi minori cubo d e f. Residuum porrò rectangulum solidum a m, sub inæqualibus dimensionibus, & in quadrata basi continebitur: quod in cubum, eidem solido rectangulo æquale, per quartam propositionem uel facilè reducetur: inuentis inter latus ipsius quadratæ basis a b, & altitudinem a l, duabus lineis rectis continuè proportionalibus, per aliquam propositionum antecedentis libri, quæ sint n o, & p r. Cubum*



enim quod ex ea media linea proportionali deſcribetur, quæ eidē quadratæ baſis lateri uicinior erit, ipſi reſiduo a m, erit æquale: ueluti cubum, cuius latus eſt n o, ipſius figuratæ deſcriptionis.

¶ De rectangulis ſolidis, minimè cubis.

¶ Idem quoque faciendum eſſe uelim intelligas, de rectangulis ſolidis minimè cubis. Nam ſuper quadrata baſi maioris ſolidi rectanguli, deſcribi poterit ſolidum rectangulum, ipſi minori æquale, per ea quæ propoſitione quinta prædocuimus. Deinde facienda erit ſubtractio minoris ſolidi rectanguli, ab ipſo maiori, non aliter quàm de ſubtractione minoris cubi à maiori cubo, nuperrimè dictum extitit. 2

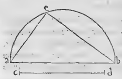
¶ Corollarium 1. De mutua columnarum, uel pyramidum ſubtractione.

¶ AB OMNI IGITVR COLVMNA, SEV PYRA- *mide maiori, minor columna, ſiue pyramis, detrahi conſequenter poterit: & reſiduum in ſimilem uel columnam, uel pyramidem pendenter reuocari. Nam ſi datæ columnæ, oblatæue pyramides, inæqualis fuerint altitudinis: minor illarum in altitudinem maioris, aut è diuerſo reducēda erit, per tertiam huius propoſitionem. Deinde baſes earundem colūnarum, ſiue pyramidum, quæ non fuerint quadratæ, in quadrata eiſdē baſibus æqualia transmutari debent, per ea quæ antecedentibus præoſtenſa ſunt propoſitionibus: & baſis quadrata minoris columnæ, uel pyramidis, à baſi quadrata maioris conſequenter auferri. Itaque ſi reſiduum quadratum, in circularem, aut rectilineam quanuis reducatur figuram, & ſuper eadem figura, columna, uel pyramis, ad præſatam deſcribatur altitudinē: ea erit, quæ ex ipſa ſubtractione relinquetur. quoniam ſubtracta, atque relicta columna, uel pyramis, ſe habent ut baſes.* 3

¶ Vt quadratum à quadrato ſubtrahatur.

¶ Subtrahitur autem minus quadratum, à maiori quadrato, in hunc qui ſequitur modum. Eſto latus maioris quadrati a b, minoris uerò c d. Et ſuper a b latere, ſemicirculus deſcribatur a e b. Ipſi poſtmodum minori lateri c d, æqualis in eodem coaptetur ſemicirculo, per primā quarti elementorum: 4

elementorum: & connectatur a e, linea recta. Erit enim a e recta, latus quadrati residui: quoniam angulus qui ad e, rectus est, per trigesimam primam tertij eorundem elementorum. Et proinde quæ ex a e, & e b, rectis quadrata describũtur, æqualia sunt ei quod fit ex a b, per quadragesimam septimam primi supradictorum elementorum.



¶ Corollarium 2. De subtractione regularis corporis, à simili regulari corpore.

5 ¶PATET RVRSVM, QVAM FACILE VNVMquodque cæterorum regularium corporum à cubo, detrahi possit à maiori & simili corpore regulari: atque latus residui corporis, ipsis datis similis tandem exprimatur. Vtrunque enim regulare corpus, in cubum æquale reduci uel facilè poterit, per secundum corollarium antecedentis sextæ propositionis: & cubum minoris corporis, à cubo maioris penderi auferri, per hanc octauam propositionem. Residuum tandem solidum rectangulum, reuocari poterit in cubum, per antecedentem quartam propositionem: atque demum inueniri latus similis corporis regularis, eidem cubo, & ipsi proinde residuo æquale, per ea quæ proximè fuere demonstrata.

PROPOSITIO IX.

Oblatis duabus sphæris inuicem æqualibus, aut inæqualibus, unam describere sphæram, ipsis datis æqualem.

1 ¶VTRIQVE SPHAERAE CVBVM AEQVALE describatur, per sextam huius propositionem. Ipsis postmodum cubis, unum æquale cubum fabricetur, per sequentem propositionem septimam: quod ipsis duabus sphæris de necessitate coæquabitur. Huic demũ cubo, æqualis sphæra construatur, per eandem sextam propositionem. Eadem nanque sphæra, ipsis duabus sphæris à principio datis erit æqualis: utpote, quæ eidem communi cubo simul adæquantur. Huius propositionis, nullo opus esse reor exemplo: ni uelis singula, proximis &

nuper allegatis propositionibus sufficiẽter expressa, in uanum resumere.

¶ Notandum.

¶ *Quòd si plures duabus oblatæ fuerint sphæræ, in unam sphæram ipsis datis æqualem reducendæ: reductis duabus primis illarum, in unam sphæram ipsis duabus æqualem, eadem sphæra unà cum sequenti tertia, in unam rursum sphæram colligenda est: & deinceps in hunc modum quantumlibet, pro datarum sphærarum in unam componendarum multitudine.* 2

PROPOSITIO X.

A Maiori sphæra, minorem sphæram auferre: & residuam sphæram, uersa uice reddere notam.

¶ *Conuertatur in primis utraque sphæra in cubum æquale: & minus cubum, à maiori cubo auferatur, per sextam, & octauam huius propositionem. Residuum tandem solidum rectangulum, in cubum æquale, per quartam huius propositionem rursum transmutetur: & ipsi cubo æqualis, sphæra tandem describatur, per nunc citatam sextam huius propositionem. Nam ipsa ultima sphæra, erit ea, quæ ex proposita subtractione relicta est.* 1

¶ Idem efficere de columnis & pyramidibus.

¶ IDEM QVOQVE FIERI POTERIT DE COlumnis, & *pyramidibus, in cubum æquale, per corollarum ipsius quartæ propositionis, in primis reuocatis. Ipsum nanque residuum solidum rectangulum, in prioris speciei columnam, aut pyramidem, per corollariũ succedentis quintæ propositionis huius, transmutari uel facilè poterit: quæ relictam columnam, uel pyramidem, ex proposita columnarum, uel pyramidum subtractione tandem propalabit.* 2

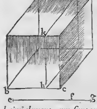
PROPOSITIO XI.

CVbum, ac unumquodque solidum, sub æquidistantibus planis cõprehensum, pro data ratione secare.

¶ SIT DATVM IN PRIMIS CVBVM (VT ARtem *cũ exemplo simul edoceamus) pro data ratione secandũ a b c d. ipsa uerò ratio data, quæ e f, ad ipsam f g. Datum itaque latus cubi, utpote* 1

b c,

b c, datæ rectæ lineæ e g, sectæ in puncto f, similiter secetur in puncto h, per decimam sexti elementorum: sicut quidem e f, ad ipsam f g, sic b h, segmentum ad reliquum h c. Et per ipsum punctum h, utrique plano quadrato a b, & c d, æquidistans & æquale planum quadratū describatur h k l. Aio itaque, planum h k l, datum cubum a b c d, sub data ratione secare. Parallelogramma enim sunt, *atque rectangula b h k, & k h c, quadrilatera, atque sub eodem uertice constituta: se habent igitur ut bases b h, & h c, per primam sexti elementorum.* Parallelogrammū *igitur b h k, ad ipsum k h c, parallelogrāmum se habet, ut basis b h, ad basin h c: & proinde ut e f, ad f g. Sicut porrò parallelogrammum b h k, ad ipsum k h c, parallelogrammum, sic solidum rectāgulum a b h l, ad rectangulum solidum l h c d, per 32 undecimi elementorum: sunt enim sub eadem altitudine, quæ est ipsius dati cubi latus. Solidum itaque rectangulum a b h l, ad solidum rectangulum l h c d, eandem rationem habet, quam e f, ad f g, per undecimam quinti eorundem elementorum.* Datum propterea cubum *a b c d, plano h k l, dissectum est: atque sub data ratione, quæ e f, ad f g.*



De solidis parallelepipedis, non cubis.

2 ¶ *Haud alienum habeto iudicium de quouis rectangulo, solido minimè cubo: aut alio solido parallelepipedo, sub æquidistantibus planis comprehenso. Vno etenim ex longioribus, aut breuioribus lateribus, instar ipsius e f g, aut sub quauis alia ratione, similiter diuiso: reliqua omnia, ut in præmissa cubi diuisione, ueniunt pendenter obseruanda.*

¶ Corollarium, de diuisione cylindri, sub quauis ratione data.

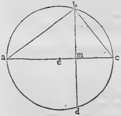
3 ¶ CYLINDRVS CONSEQVENTER, SVB DATA *itidem ratione diuidetur, utpote, quæ est ipsius e f, ad f g. Diuisa enim illius altitudine, siue longitudine axis, instar ipsius rectæ e f g, quæ sub ratione data secta est in puncto f, atque ducto per punctū diuisionis*

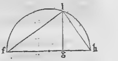
circulari plano: se habebunt ipsius cylindri segmenta, ueluti partes axis, per 14 duodecimi elementorum, & proinde sicut partes lineæ rectæ, quæ sub data ratione in primis diuisa proponetur.

PROPOSITIO XII.

Datam sphærã, in duas sectiones inæquales, sub quauis ratione data consequenter diuidere.

¶ESTO DATA SPHAERA, CVIVS CIRCVLVS 1 *maior sit a b c d, illiúsque centrum e, atque eiusdẽ circuli diameter a e c: data uerò ratio, quæ f g, recta, ad ipsam g h. Describatur igitur super f g h, linea recta, semicirculus f l h: & excitetur g l, super f h, perpendicularis, per undecimam primi elementorum: connectatúrque f l, & l h, lineæ rectæ.* Rectus erit *igitur angulus f l h, per 31 tertij elementorum: atque g l, media proportionalis, inter f g, & g h, per corollarium octauæ sexti eorundem elementorum: sicut uidelicet f g, ad g l, sic eadem g l, ad ipsam g h.* Ratio autem *ipsius f g, ad g h, cõstat ex eisdem rationibus, f g, inquam ad g l, & ipsius g l, ad g h, per ea quæ super decimam diffinitionem libri quinti, & quintam diffinitionem libri sexti elemẽtorum conscripsimus.* Constabit *igitur ex alterutra prædictarum rationum duplicata, hoc est, in seipsam ducta: utpote, ipsius f g, ad g l.* Duplo *maiorem itaque rationem habet f g, ad g h, quàm eadem f g, ad ipsam g l.* Fiat *igitur consequenter, ut l f, ad ipsam f g, sic diameter c a, ad rectam a b, per 12 sexti elementorum.* Et *connectatur recta b c: ducatúrque recta b d, super eodem a c, dimetiente perpendicularis, siue orthogona.*



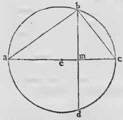


2 ¶HIS PRAEMISSIS, AIO CIRCVLVM, CVIVS *dimetiens est b m d, datam sphæram a b c d, sub data ratione quæ f g, ad g h, dispescere. Angulus enim in primis a b c, rectus est, per 31 tertij elementorum: & proinde æqualis recto f g l. Præterea, circum angulos b a c, & l f g, consistentia latera, sunt per constructionem inuicem proportionalia: sicut uidelicet c a, ad a b, sic l f, ad f g. Reliquorum insuper angulorum b c a, & f l g, uterque simul recto minor est. Aequiangula itaque sunt a b c, & f l g, triangula, per sextam sexti elementorum.* Et per quartam eiusdem sexti, *latera quæ circum æquales angulos, proportionalia sunt adinuicem: atque similis rationis, quæ æqualibus angulis latera subtenduntur. Sicut igitur f g, ad g l, sic a b, ad b c.* Atqui *f g, ad ipsam g h, præostensa est duplo maiorem obtinere rationem, quàm eadem f g, ad ipsam g l.* Eadem propterea *f g, ad ipsam g h, duplo maiorem rationem habebit, quàm eadem a b, ad ipsam b c.* Et quoniam *circuli sese adinuicem habent, sicut quæ ex illorum dimetientibus fiunt quadrata, per secundam duodecimi elementorum: se habent igitur inuicem, sicut quadrata quæ ex eorundem circulorum describuntur semidiametris, quæ subquadrupla sunt eorundem quadratorum, quæ ex ipsis fiunt diametris.* Partes enim eodem *modo multiplicium, eandem rationem habent sumptæ adinuicem, per quindecimam quinti eorundem elementorum.* Circulus igitur, *cuius semidiameter est a b, ad circulum, cuius semidiameter est b c, se habet, ut quadratum quod fit ex eadem a b, ad quadratum quod fit ex ipsa b c.* Sed quadratum, ad quadratum duplo maiorem rationem *habet, quàm latus ad latus.* Quod igitur ex *a b, fit quadratum, ad id quod fit ex b c, & proinde circulus, cuius semidiameter est a b, ad circulum cuius semidiameter est b c, duplo maiorem rationem habet, quàm eadem a b, recta, ad ipsam b c.* Atqui *f g, ad g h, duplo itidem maiorem rationem præostensa est habere rationem, quàm eadem a b, ad ipsam b c.* Circulus itaque *cuius semidiameter est a b, ad circulum cuius semidiameter est b c, eandem rationem habet, quam f g, ad ipsam g h.* Quod in primis fuerat ostendendum.

3 ¶HIS PRAEOSTENSIS, MANIFESTVM EST *ex 40, & 41 secundi libri Archimedis de sphæra & cylindro, superficiem sectionis maioris b a d, ipsius datæ sphæræ a b c d, æquari circu-*

y

lo, cuius ſemidiameter eſt a b: atque ſuperficiem minoris ſectionis b c d, æqualem ſimiliter eſſe circulo, cuius ſemidiameter eſt b c. Hoc igitur *modo, utraque ſuperficies in circulum reſoluitur.* Per *ipſius autem libri ſecundi de ſphæra & cylindro 42 propoſitionem, datæ ſectioni ſphæræ æqualis eſt conus, cuius baſis æquatur ſuperficiei eiuſdem ſectionis, altitudo uerò ipſius ſphæræ ſemidiametro.* Conus *igitur, cuius baſis fuerit circulus ex a b, deſcriptus, altitudo uerò ſemidiameter a e, æquabitur ipſi ſectioni b a d:* Conus *ſimiliter, cuius baſis fuerit circulus deſcriptus ex ipſa b c, æquabitur ſectioni b c d.* Hi *proinde coni, eandem habebunt altitudinem.* Sub *eodem porrò faſtigio exiſtentes coni, adinuicem ſe habent ſicut baſes, per undecimam duodecimi elementorum.* Conus *itaque, cuius baſis eſt circulus ex a b, deſcriptus, altitudo uerò ſemidiameter a e, ad conum cuius baſis eſt circulus ex b c, delineatus, & altitudo idem ſemidiameter a e, uel e c, eandem rationem habet, quam circulus qui ex a b, ad circulum qui ex b c, deſcribitur: & proinde, quam f g, ad ipſam g h.* Et *ipſæ demum ſectiones b a d, & b c d, eiſdem conis æquales, eandem rationem habebunt adinuicem, quam eadem f g, ad ipſam g h.* Data *ergo ſphæra a b c d, ſub plano circulari, cuius diameter eſt recta b m d, in duas ſectiones inæquales, datam rationem quæ f g, ad g h, obſeruantes, diſſecta eſt.* Quod *faciendum, atque demonſtrandum receperamus.*





¶ Corollarium ·

¶ Corollarium 1. Quòd sphæra in duas sphæras, sub data ratione proportionatas diuidatur.

4 ¶ *Sphæra itaque in duas sphæras sub data itidem ratione proportionatas diuidi poterit. Per ea enim quæ proximè demonstrata fuere, sphæra in duas partitur sectiones datam rationem obseruantes: & cuilibet sectioni, conus æqualis describitur, per allegatam 42 propositionem secundi libri* Archimedis *de sphæra & cylindro.* Omnis autem conus, *in cubum æquale transmutatur, per corollarium antecedentis quartæ propositionis: & cubum in sphæram, per octauam huius propositionem tandem reducitur.*

¶ Corollarium 2. Quòd circulus in duas sectiones sub ratione data partibilis est.

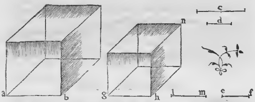
5 ¶ OMNIS PRAETEREA CIRCVLVS, IN DVAS *sectiones sub data ratione itidem proportionatas, diuidi admodum facile poterit. Cùm enim circulus se habeat ad sphæram, ut linea recta ad ipsum circulum: manifestum est rectam b m d, præfatum circulum a b c d, in duas partiri sectiones b a d, atque b c d, sub ipsa ratione data quæ f g, ad g h, proportionatas. Quæ quidem omnia, hactenus fuere desiderata.*

PROPOSITIO XIII.

CVbo, ac unicuique rectāgulo, aut regulari solido sub æqualibus planis comprehensō: simile solidum, sub ratione data maius, aut minus construere.

1 ¶ FACIAMVS IN PRIMIS DE CVBO PERICVLUM: *sitque propterea datum cubum, cuius latus sit a b, data uerò ratio, quæ c ad d. Et operæpretium sit simile, similitérque positum cubum describere, sub ipsa ratione data quæ c ad d, proportionatum: hoc est, ad quod datum cubum ex a b, latere descriptum eandem habeat rationem, quam c recta, ad rectam d. Sicut igitur c ad d, sic fiat a b, latus, ad rectam e f, per duodecimam sexti elementorum. Consequenter inter a b, & e f, duæ mediæ lineæ rectæ sub eadem ratione continuè proportionales inueniantur, per ea quæ primo libro tradita sunt:*

quæ sint g h,& l m, sicut quidem a b, ad g h, sic eadem g h, ad l m, atque eadem l m, ad ipsam e f. Ex data postmodum linea recta g h, dato cubo quod ex a b, simile, similiterque positum cubum describatur g h n, per 27 undecimi elementorum. Aio itaque, datum cubum quod ex a b, latere descriptum est, eandem habere rationem ad ipsum g h n, quod ex ipsa g h, describitur, quam c recta, ad ipsam d. Cùm enim quatuor lineæ rectæ a b, g h, l m, e f, continuè sint proportionales: est igitur sicut prima a b, ad quartam e f, sic datum cubum, cuius latus est a b, ad ipsum cubum g h n, quod ex secunda proportionali g h, descriptum est, per corollarium trigesimætertiæ undecimi elementorum. Vt autem a b, ad e f, sic c, ad ipsam d, per cõstructionem: Sicut propterea c, ad d, sic per undecimam quinti eorundem elementorum, datum cubum quod ex a b, ad ipsum cubum g h n.

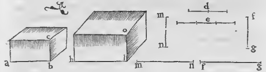


¶ De solidis parallelepipedis minimè cubis.

¶HAVD ALITER DATVM QVODVIS ALIVD *solidum non cubum, altera uidelicet parte longius & rectangulum, tantummodòue parallelepipedum: pro data ratione augere, uel minuere licebit. Quanquam autem huiuscemodi solida, diuersas & inæquales habeant dimensiones: poterit nihilominus unaquæque prædictarum dimensionum, pro prima linea proportionali indifferenter usurpari. Cætera porrò, ueluti suprà demonstrauimus, pendenter ueniunt absoluenda. ¶ Esto in maiorem omnium elucidationem, datum solidum parallelepipedum a b c: data uerò ratio, quæ d recta, ad ipsam e. Et sicut d, ad ipsam e, sic fiat latus a b, ad ipsam f g: atque inter ipsas a b, & f g, duæ* 2

duæ mediæ colligantur proportionales, per aliquam antecedentis primi libri propositionem, quæ sint h l, & m n: sicut uidelicet a b, latus ad ipsam h l, sic eadem h l, ad ipsam m n, atque eadem m n, ad ipsam f g. Describatur postmodum ex ipsa h l, solidum parallelepipedum h l o, ipsi a b c, simile, atque similiter positum, per ipsam 27 undecimi elementorum. Erit igitur, per idem corollarium 33 ipsius undecimi, ut d, ad e, sic a b c, solidum parallelepipedum, ad simile similiterque positum siue descriptum parallelepipedum h l o. Poterit quoque à principio fieri, ut d, ad e, sic latus b c, ad ipsam f g. atque duæ rursum inueniri medio loco proportionales l o, & m n, inter idem latus b c, & ipsam f g: tandémque absolui reliqua omnia, quemadmodum nuper demonstratū extitit.

3 ¶ *Haud alienum uelim habeas iudicium, de quolibet cæterorū quatuor regularium corporum à cubo: ea enim pro ratione data non aliter augebis, quàm de ipso cubo, aut quouis alio solido parallelepipedo tradidimus.*



¶ Corollarium, De augenda, uel minuenda sphæra, pro ratione data.

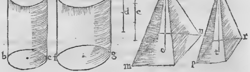
4 ¶ *Data igitur sphæra, sub quauis ratione data, proportionaliter augeri, uel minui consequenter poterit. Nam per antecedentem sextam propositionem, sphæra uertitur in cubum: & per hanc decimam tertiam, cubum ipsum, pro data ratione, proportionaliter augetur, uel minuitur. Ipsi rursum cubo, sub data ratione proportionaliter aucto, uel diminuto, æqualis sphæra describitur, per eandem sextam propositionem. Corollarium ergo uerum, atque facillimum.*

PROPOSITIO XIIII.

Omni columnæ, seu pyramidi, similem & sub data ratione maiorem, uel minorem columnam, seu pyramidem erigere.

¶EX SEXTA PROPOSITIONE LIBRI TERTII 1
notum relinquitur, qualiter omnis figura rectilinea, & proinde basis tam colũnæ quàm pyramidis laterata, sub quauis ratione data proportionaliter augeatur, uel diminuatur: Ex sequẽti uerò propositione septima eiusdẽ libri tertij, idem præostensum est de circulo. Igitur si pro data ratione, basis oblatæ columnæ, uel pyramidis, proportionaliter augeatur, uel minuatur, & super huiuscemodi basi, similis columna, uel pyramis excitetur, ad ipsius datæ columnæ uel pyramidis altitudinem: fiet columna, siue pyramis, eadem oblata columna, pro ratione data maior, aut minor. Sub eodem nanque fastigio existentes pyramides, se habent adinuicem sicut bases: lateratæ quidem per quintam & sextam, rotũdæ uerò per undecimam duodecimi elementorum. Et quoniam ipsæ columnæ, eandem basin & altitudinem habentes cum ipsis pyramidibus, triplam rationem habent ad ipsas pyramides: necessum est idem præfatis accidere columnis, quod & ipsis pyramidibus. Partes enim, & æquè multiplicia, eandem rationem habent sumpta adinuicem, per 15 quinti elemẽtorum. Eodem itaque modo columnæ, quo & ipsæ pyramides, pro ratione data proportionaliter augebuntur, uel diminuentur.

¶ *In quorum omniũ maiorẽ fidem, subscriptæ contemplentur descriptiones. In quarũ prima, data rotũda colũna a b c, pro ratione ipsius d, ad e, rectã, proportionaliter aucta est: augmentato prius sub eadẽ ratione f g, circulo, & super illo descripta colũna f g h, ad altitudinẽ g h, quæ ipsi a b, sit æqualis. In secunda uerò descriptione, laterata pyramis l m n, pro ratione ipsius e, ad rectã d, proportionaliter est diminuta: facta in primis rectilinea basi p r, ipsa basi m n, sub præfata ratione minori, atque ad altitudinem l o, æqualem, utpote s t, descripta simili similiterque posita pyramide s p r.* 2



PROPOSITIO XV.

VAsorum tandem capacitates, tormentorúmque bellicorum uires, & pondera, atque his similia, sub data ratione proportionaliter augere, uel minuere.

1 ¶DE VASIS HIC POTISSIMVM INTELLIGImus, *quæ regularia sunt, & quibus similia transformari uel facilè possunt: cuiusmodi uidentur esse liquidorum, aut granorum uulgata mensura, & quæ his similia sunt. Augmentandæ sunt igitur in primis, aut minuendæ, pro data ratione geometrica, eiusce modi uasorum siue mensurarum bases: per ea quæ sexta, atque septima propositione antecedentis libri tertij tradita sunt.* Fabricanda *sunt deinde, super huiuscemodi proportionaliter auctis uel diminutis basibus, similia similitérque posita uasa, seu mensurarum instrumenta: quemadmodum de columnis, & pyramidibus, proxima declaratum extitit propositione. Quæcunque enim de solidis, antecedentibus tradita sunt propositionibus (ne te longioribus uerborum detineamus ambagibus) in similibus, hoc est, similiter figuratis, atque similiter positis uasorum atque mensurarum excauaturis, ueniunt pendenter obseruanda.* Hic *per huiuscemodi uasorum, atque mensurarum bases, intelligimus illorum orificia: quæ inuerso uase, siue mensura, bases esse uidentur.*

¶ De tormentis bellicis.

2 ¶ *Non aliter de tormentis bellicis, ac illorum emissariis globis censendum, atque faciendum esse uelim existimes.* In *primis enim emissarij talium machinarum globi, figuræ sunt sphaericæ: idcirco non aliter augendi, uel minuendi, pro data ratione uidentur esse, quàm ipsum corpus sphæricum.* De *cuius proportionato incremento, uel decremento, antecedentis decimætertiæ propositionis traditum est corollario.* Ipsa *porrò machina bellica, duobus modis augenda, uel minuenda, pro data uidetur esse ratione.* In *primis quidem, seruata eiusdem machinæ longitudine: & basi, simul cum illius capacitate aucta, uel diminuta. Secundò, eadem crassitudinis basi inuiolata permanente: sed aucta, uel diminuta longitudine, unà cum ipsa capacitate.* Hic *de tota mole uelim non in-*

elligas ipsius machinæ: sed de illius tantùm excauatura, quæ globum recipit emissarium, & ui pulueris in ignem conuersi, atque supra loci capacitatem rarefacti, uiolenter eiicit. Quæ quidem excauatura, cùm cylindri, seu rotundæ columnæ uideatur habere figuram: & ipsarum columnarum propositæ sub quauis ratione data augmentationes, atque diminutiones, unà cum illarum transmutationibus, suis propositionibus & corollariis sufficienter sint elucidatæ: de his ulterius uerbum addere, ne eadem sæpius, ac inutiliter repetere uideamur, consulto supersedemus.

QVARTI, ET VLTIMI LIbri *rerum* Mathematicarum *hactenus desideratarum* Orontio Finæo Delphinate, Regio Mathematico, authore,

F I N I S.

Virescit uulnere uirtus.

148

Conti Finali del R. [illegible]

96